-

時系列解析（７）

－局所定常ARモデル－

東京大学 数理・情報教育研究センター
北川 源四郎

概 要

区分的定常モデル：非定常時系列モデルへの第1歩

1．レベルシフトの検出

2．局所定常ARモデル

（1）任意の区間への自動分割

（2）変化時点の精密な推定

（3）変化時点の事後確率

3．統計的制御

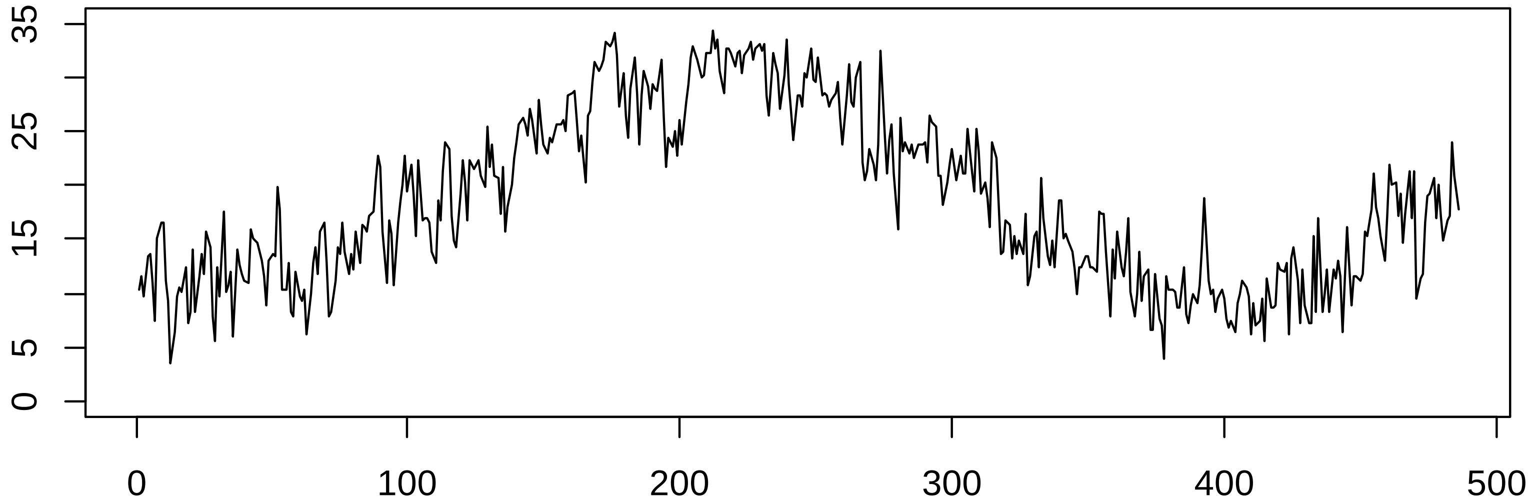
（1）線形二次評価制御問題

（2）船舶のオートパイロット

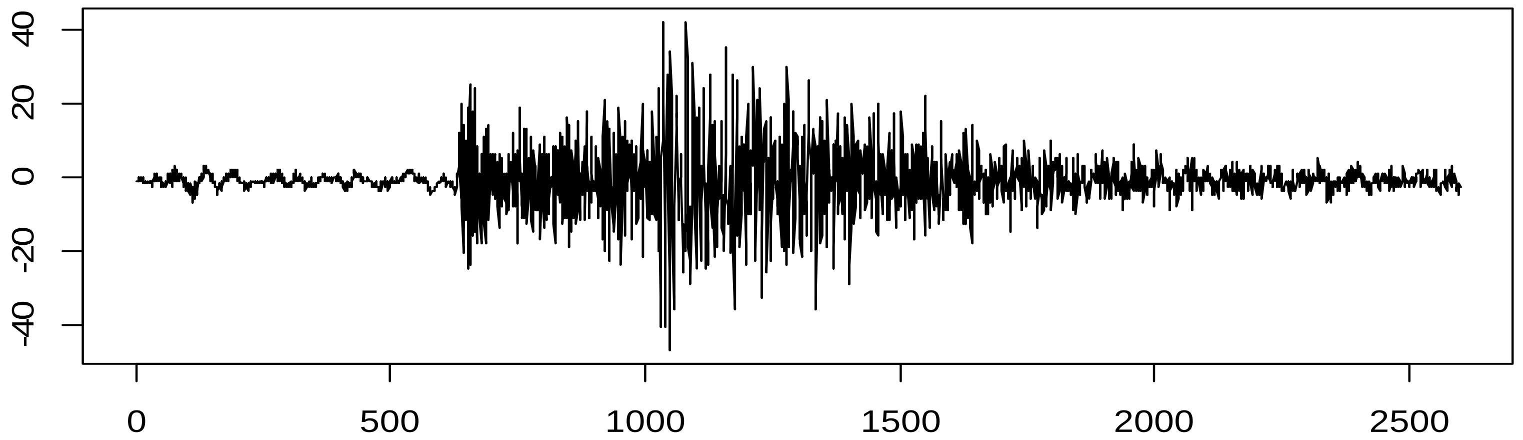
（3）局所定常ARモデルに基づく外乱適応型自動制御

定常モデルで非定常時系列を分析する

平均非定常時系列 → 差分 + 定常モデル



分散・共分散非定常時系列 → 区分化 + 定常モデル



非定常時系列のモデリング

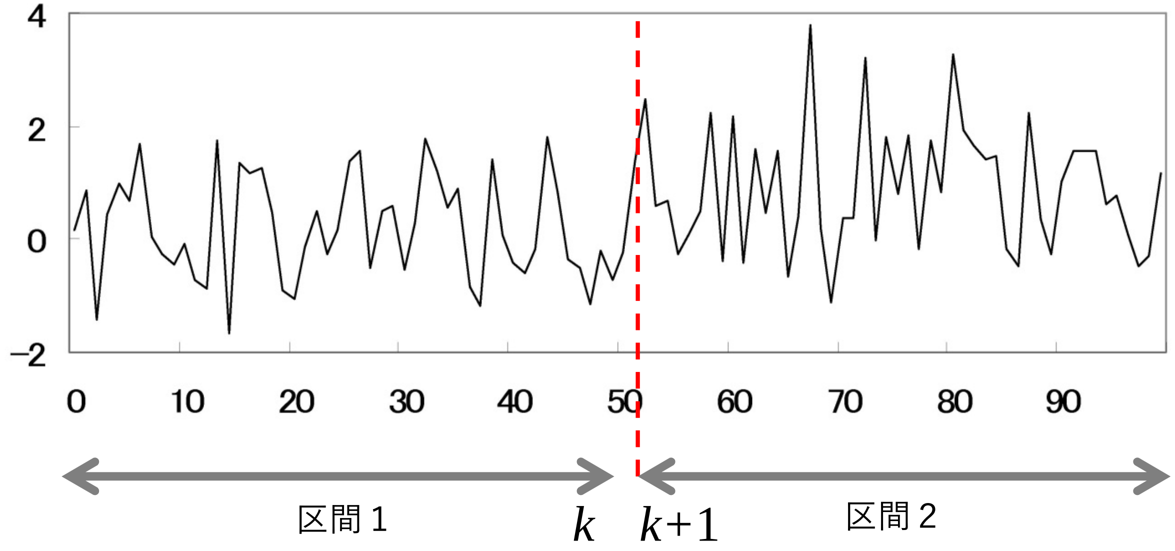
✓ ARIMAモデル
  平均非定常　　定常化　　ARMAモデル

● レベルシフトモデル
  平均非定常　　区分的定常

● 局所定常ARモデル
  平均・分散・共分散非定常　　区分的定常

✓ 状態空間モデル
  平均・分散・共分散非定常　　直接モデル化（次回以降）

レベルシフトの検出



$$y_n \sim N(\mu_n, \sigma^2) \qquad p(y_n|\mu_n,\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(y_n-\mu_n)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$k+1$: 変化点

$$\mu_n = \begin{cases} \theta_1 & n \le k \\ \theta_2 & n > k \end{cases}$$

$y_1, \ldots, y_N$　データ

変化点を $k+1$ と仮定したモデルの尤度

$$L(\theta_1, \theta_2, \sigma_k^2) = \prod_{n=1}^{k} p(y_n \mid \theta_1, \sigma_k^2) \prod_{n=k+1}^{N} p(y_n \mid \theta_2, \sigma_k^2)$$

レベルシフトの検出

尤度
$$L(\theta_1,\theta_2,\sigma_k^2)=\prod_{n=1}^{k}p(y_n\,|\,\theta_1,\sigma_k^2)\prod_{n=k+1}^{N}p(y_n\,|\,\theta_2,\sigma_k^2)$$

対数尤度
$$\ell(\theta_1,\theta_2,\sigma_k^2)=-\frac{N}{2}\log(2\pi\sigma_k^2)-\frac{1}{2\sigma_k^2}\left\{\sum_{n=1}^{k}(y_n-\theta_1)^2+\sum_{n=k+1}^{N}(y_n-\theta_2)^2\right\}$$

最尤推定値
$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}y_n,\qquad \hat{\theta}_2=\frac{1}{N-k}\sum_{n=k+1}^{N}y_n$$
$$\hat{\sigma}_k^2=\frac{1}{N}\left\{\sum_{n=1}^{k}(y_n-\hat{\theta}_1)^2+\sum_{n=k+1}^{N}(y_n-\hat{\theta}_2)^2\right\}$$

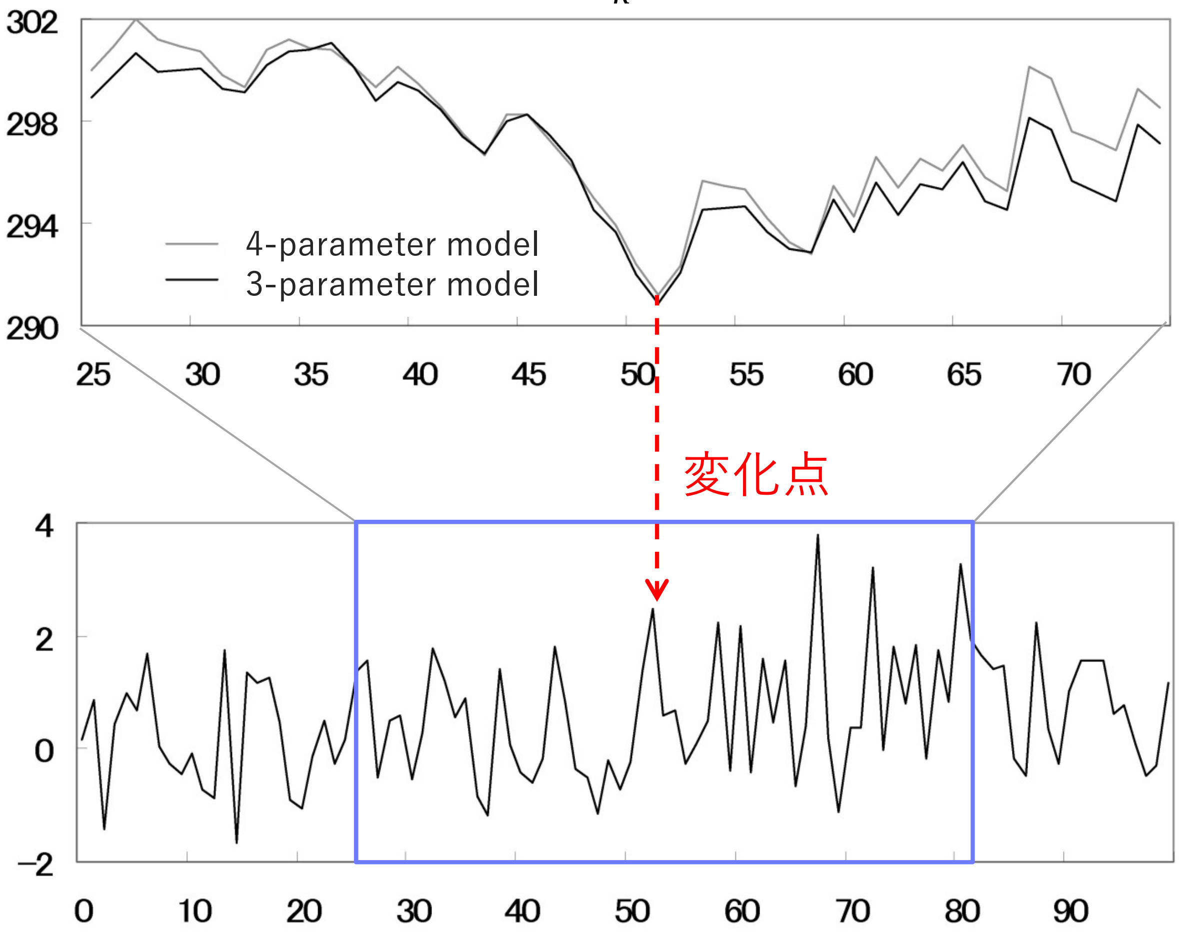
最大対数尤度
$$\ell(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\hat{\sigma}_k^2)=-\frac{N}{2}\log(2\pi\hat{\sigma}_k^2)-\frac{N}{2}$$

パラメータ数＝３

$$\boxed{\mathrm{AIC}_k=N\log(2\pi\hat{\sigma}_k^2)+N+2\times 3}$$

変化点の検出

AIC_k の変化



3パラメータモデル

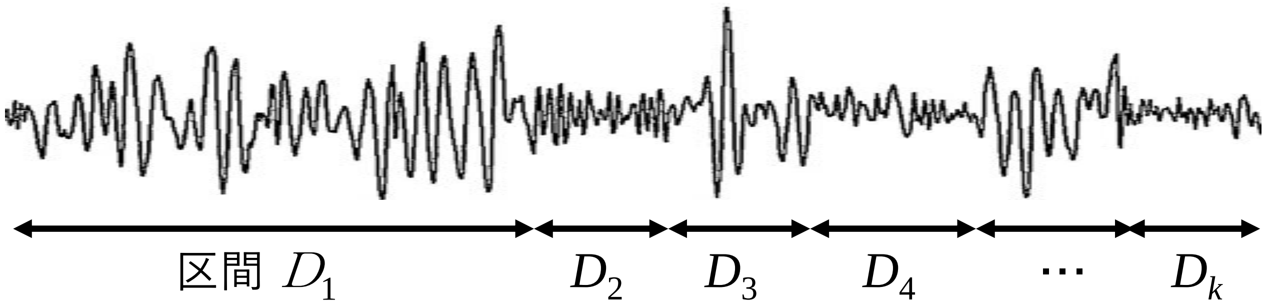
$$y_n \sim \begin{cases} N(\mu_1, \sigma^2) & n \le k \\ N(\mu_2, \sigma^2) & n > k \end{cases}$$

- 拡張
  4パラメータモデル

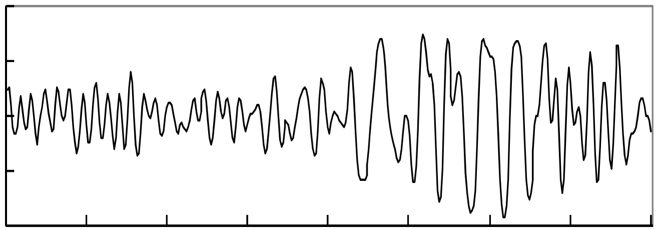
$$y_n \sim \begin{cases} N(\mu_1, \sigma_1^2) & n \le k \\ N(\mu_2, \sigma_2^2) & n > k \end{cases}$$

- さらなる拡張
  正規分布 ➡ 時系列モデル

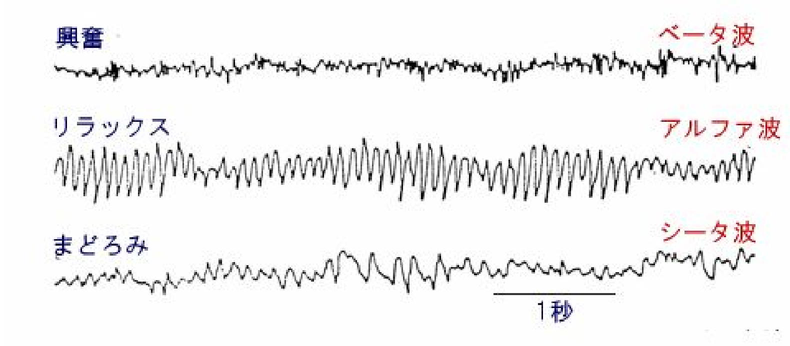
区分的に性質が変化する時系列



地震波：　常微動，P波，S波，・・・

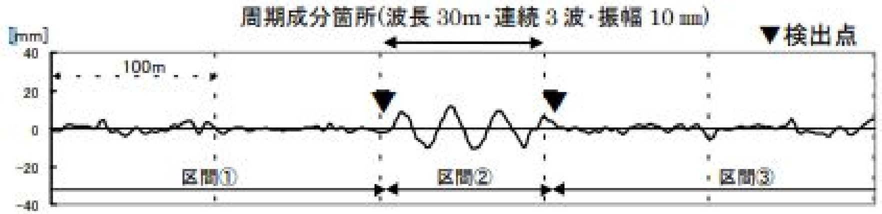


睡眠と脳波：覚醒
レム期，ノンレム期



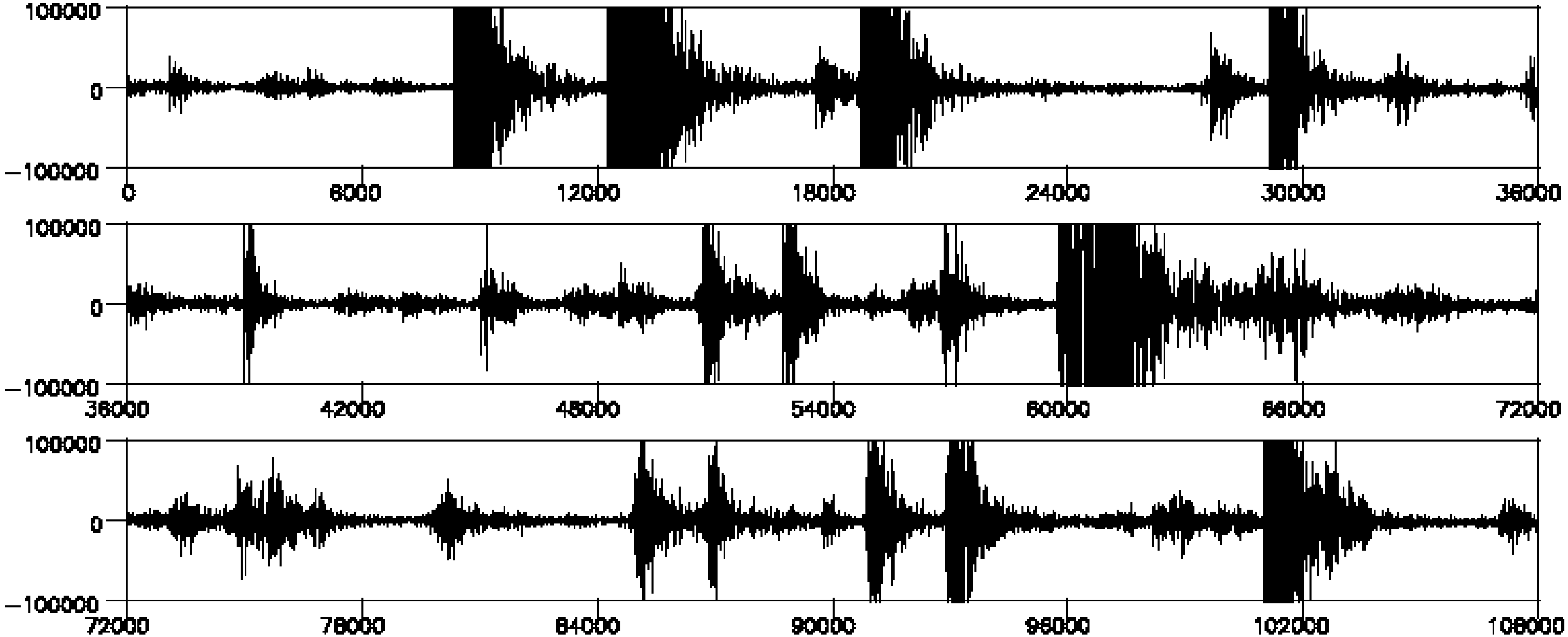
http://zone-training.jp/method-neurofeedback.html

新幹線・周期的軌道狂いの検出



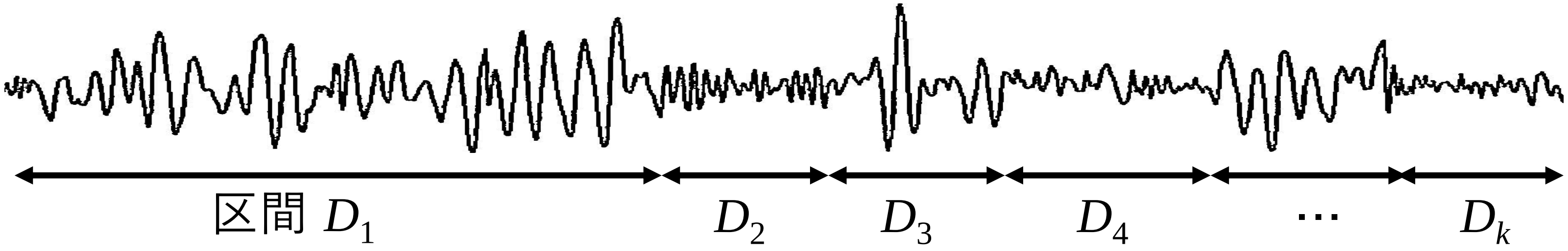
鉄道総研 元好，古川，神山（2004）

火山性微動（有珠山）



Hokkaido, Japan March 31, 2000 13:07-
提供：北海道大学火山地震予知観測センター　高波鐵夫

局所定常 AR モデル



- 各区間 D_j では定常と仮定
- D_j の定常時系列をAR(m_j)モデルで表現（$m_j \leqq M$）

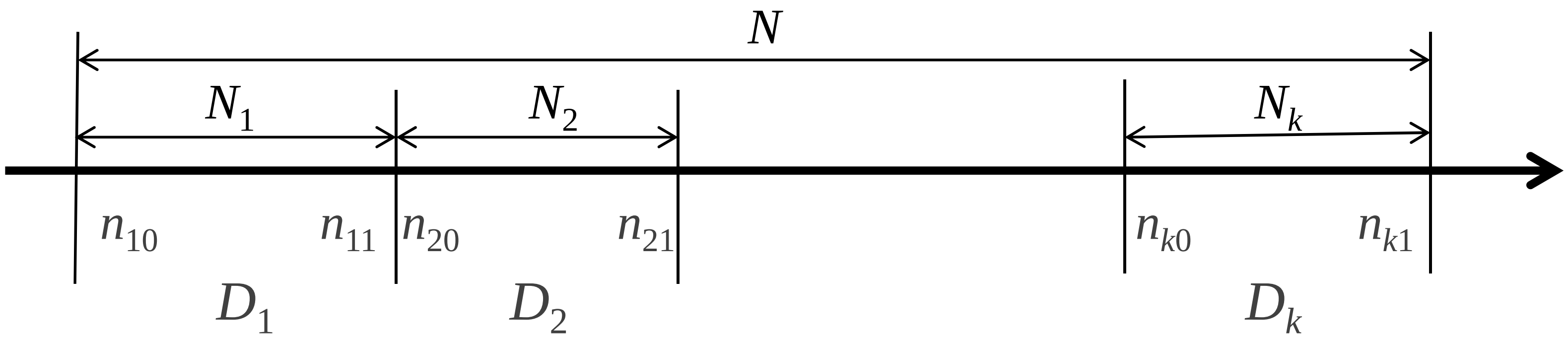
$$y_n = \sum_{i=1}^{m_j} a_{ij} y_{n-i} + v_{nj}\,,\ v_{nj} \sim N(0,\sigma_j^2), \quad n \in D_j$$

- 平均値の変化
- 分散の変化
- スペクトル・共分散構造（波形）の変化
- 任意時点での構造変化
- AICによる自動推定

局所定常ARモデル

$N = N_1 + N_2 + \cdot \cdot \cdot + N_k$　　時間領域の分割

$$D_i = [n_{i0}, n_{i1}] \qquad n_{i0} = \sum_{j=1}^{i-1} N_j + 1, \qquad n_{i1} = \sum_{j=1}^{i} N_j$$



$$y_n = \sum_{i=1}^{m_j} a_{ji} y_{n-i} + v_{nj}, \quad v_{n_j} \sim N(0, \sigma_j^2), \quad n \in D_j$$

$$\theta = (k, N_j, m_j, (a_{ji}, i = 1, \ldots, m_j), \sigma_j^2; j = 1, \ldots, k)^T$$

$$L = p(y_1, \ldots, y_N) = \prod_{j=1}^{k} \prod_{n=n_{j0}}^{n_{j1}} p(y_n \mid y_1, \ldots, y_{n-1})$$

$$\cong \prod_{j=1}^{k} (2\pi\sigma_j^2)^{-\frac{N_j}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} \sum_{n=n_{j0}}^{n_{j1}} \left(y_n - \sum_{i=1}^{m_j} a_{ji} y_{n-i} \right)^2 \right\}$$

局所定常ARモデル

$$\ell(k, N_j, m_j, (a_{ji}, i=1,\ldots,m_j), \sigma_j^2; j=1,\ldots,k)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left\{ N_j \log 2\pi\sigma_j^2 + \frac{1}{\sigma_j^2}\sum_{n=n_{j0}}^{n_{j1}}\left(y_n - \sum_{i=1}^{m_j} a_{ji} y_{n-i} \right)^2 \right\}$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{N_j}\sum_{n=n_{j0}}^{n_{j1}}\left(y_n - \sum_{i=1}^{m_j} a_{ji} y_{n-i} \right)^2$$

$$\ell(k, N_j, m_j, (a_{ji}, i=1,\ldots,m_j), \hat{\sigma}_j^2; j=1,\ldots,k)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left\{ N_j \log 2\pi\hat{\sigma}_j^2 + N_j \right\}$$
$$= -\frac{N-m}{2}(\log 2\pi + 1) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} N_j \log \hat{\sigma}_j^2$$

$$\mathrm{AIC} = (N-m)(\log 2\pi + 1) + \sum_{j=1}^{k} N_j \log \hat{\sigma}_j^2 + 2\sum_{j=1}^{k}(m_j + 1)$$

2種類の実装

- すべての区分数(k)および区間長$(N_1,\cdots,N_k)$の候補を比較し、最良の局所定常ARモデルを求めるのは非現実的

1. 任意個の区間への自動分割　・・・　大まかに分割
2. 変化点の精密推定　・・・・・・・　1か所を精密に推定

任意個の区間への自動分割

(1) 定常性を仮定する小区間の長さ L, ARの最大次数 M を決める

(2) 新しい長さ L のデータが得られる度に

Switched model

Old model　　Current model

AIC_1　　AIC_2

$\mathrm{AIC}_\mathrm{P} = \mathrm{AIC}_1 + \mathrm{AIC}_2$

∧∨

AIC_S

Pooled model

Current model

を比較し，AICが小さい方をCurrent Modelとして選択する

$N_j = c_j L$	D_j 区間の長さ
m	AR次数の最大

初期モデル（D_1のモデル）

$$X_0 = [Z \mid y] = \begin{bmatrix} y_m & \cdots & y_1 & y_{m+1} \\ y_{m+1} & \cdots & y_2 & y_{m+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{m+L-1} & \cdots & y_L & y_{m+L} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad HX = \begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & s_{m+1,m+1} \\ & O & \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_0^2(j) = \frac{1}{L} \sum_{i=j+1}^{m+1} s_{i,m+1}^2$$

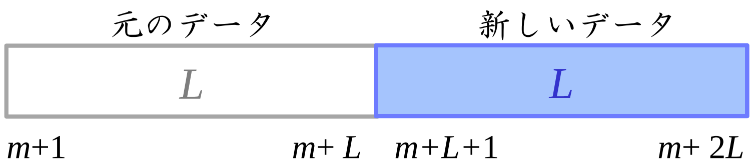
$$\mathrm{AIC}_0(j) = L \log \hat{\sigma}_0^2(j) + 2(j+1)$$

$$\mathrm{AIC}_0 \equiv \min_j \mathrm{AIC}_0(j)$$

新しいデータのモデル

$$X_1=\begin{bmatrix} y_{m+L} & \cdots & y_{L+1} & y_{m+L+1} \\ y_{m+L+1} & \cdots & y_{L+2} & y_{m+L+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{m+2L-1} & \cdots & y_{2L} & y_{m+2L} \end{bmatrix}$$

$$H_1X_1=\begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{m+1,m+1} \\ & O & \end{bmatrix}$$



$$\hat{\sigma}_1^2(j)=\frac{1}{L}\sum_{i=j+1}^{m+1} r_{i,m+1}^2$$

$$\mathrm{AIC}_1(j)=L\log\hat{\sigma}_1^2(j)+2(j+1)$$

$$\mathrm{AIC}_1\equiv\min_j \mathrm{AIC}_1(j)$$

構造変化したと仮定するモデルのAIC（Switched model）

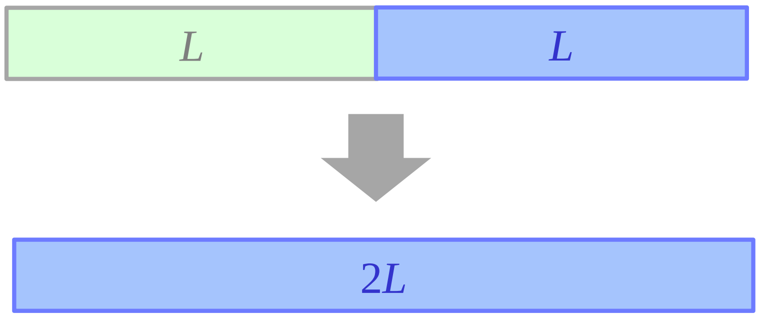
$$\mathrm{AIC}_S\equiv\mathrm{AIC}_0+\mathrm{AIC}_1=\min_j \mathrm{AIC}_0(j)+\min_j \mathrm{AIC}_1(j)$$

データ併合したモデル

$$X_2 = \begin{bmatrix} S \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & s_{1,m+1} \\ r_{11} & \cdots & r_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{1,m+1} \end{bmatrix}$$

$$H_2 X_2 = \begin{bmatrix} T \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & t_{m+1,m+1} \\ & O & \end{bmatrix}$$

構造変化なしと仮定するモデルのAIC （Pooled model）



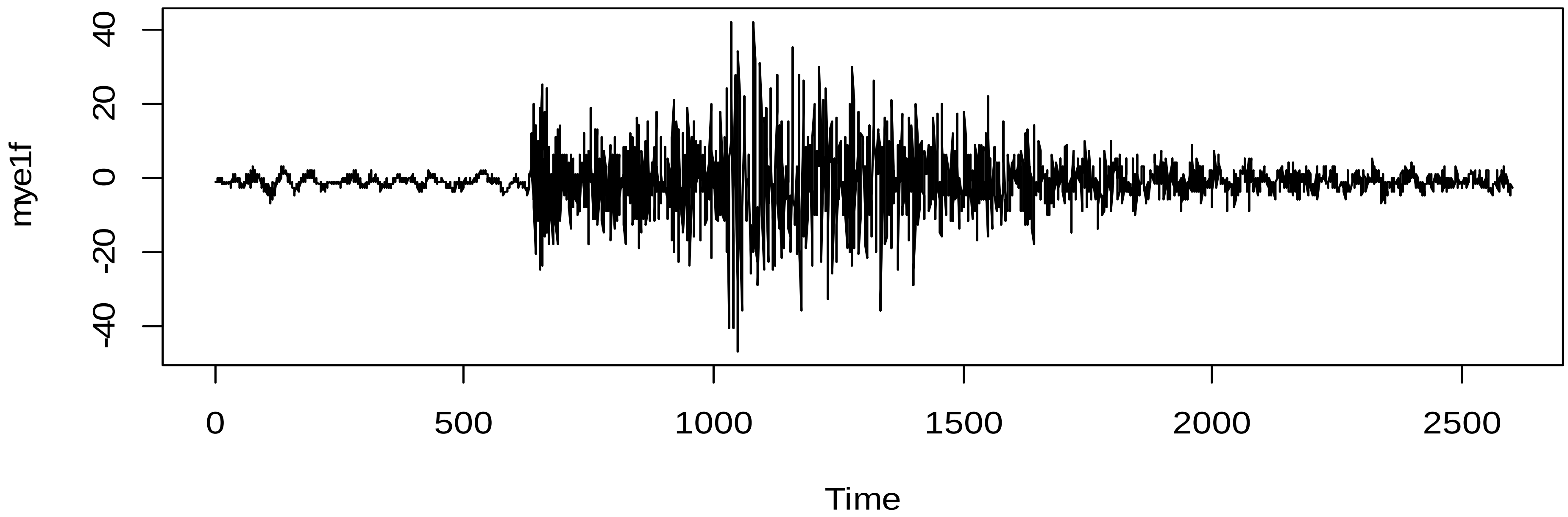
$$\hat{\sigma}_P^2(j) = \frac{1}{2L-m} \sum_{i=j+1}^{m+1} t_{i,m+1}^2$$

$$\mathrm{AIC}_P(j) = L \log \hat{\sigma}_P^2(j) + 2(j+1)$$

$$\mathrm{AIC}_P \equiv \min_j \mathrm{AIC}_P(j)$$

MYE1F(地震波東西方向)データ

data(MYE1F)
lsar (MYE1F, max.arorder = 10, ns0=200)



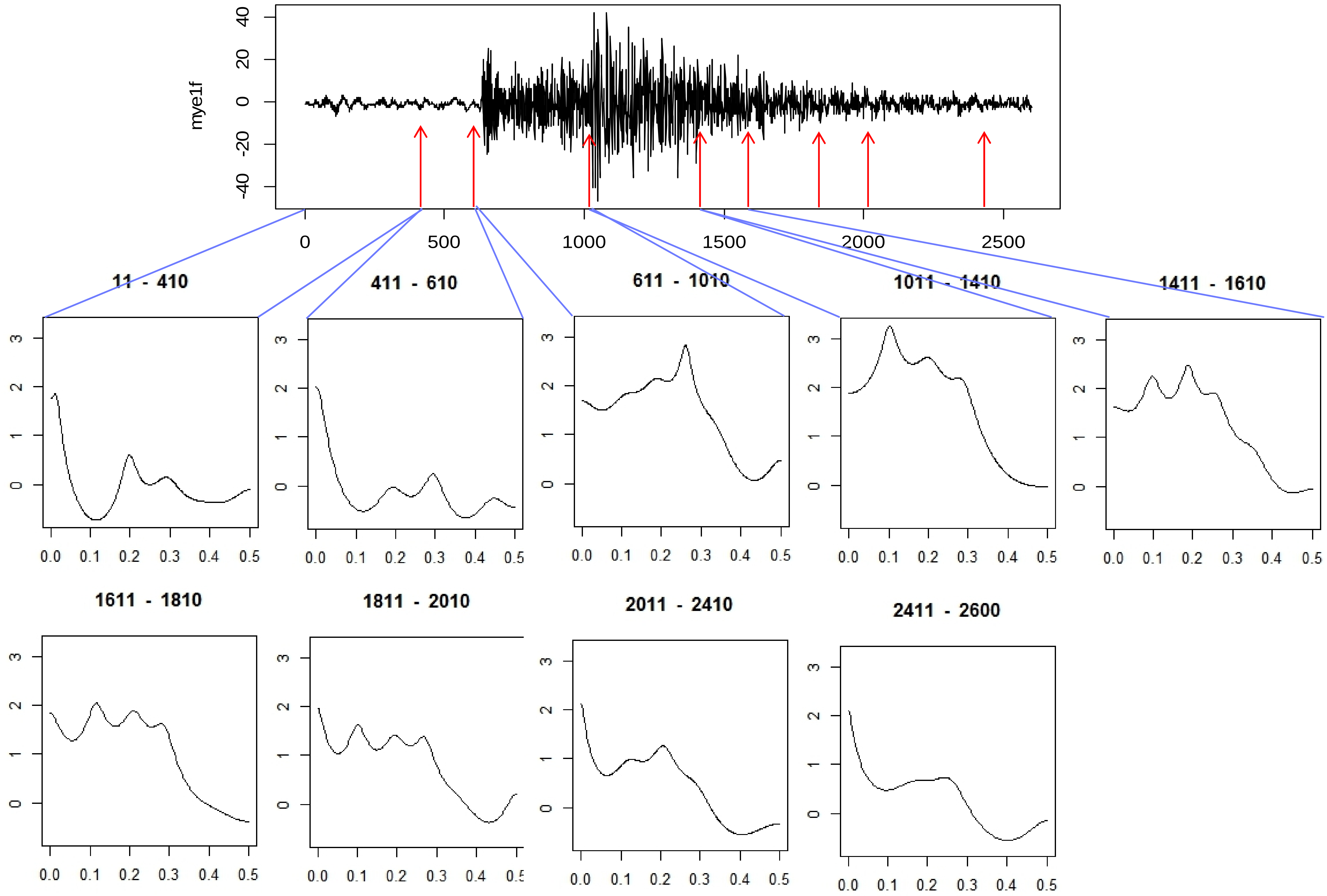
$\Delta t = 0.02$秒， N=2600

$M = 10$　最大AR次数
$L = 200$　基本区間長

局所定常 AR モデリング

lsar (MYE1F, max.arorder=10, ns0=200)

```
<<< new data ( n = 11 --- 210 ) >>>
   initial model : NS =   200
       ms = 9   sds =  9.533019e-01   aics =      578.011

<<< new data ( n = 211 --- 410 ) >>>
   switched model : ( nf = 200,  ns = 200 )
      ms = 8   sds =  7.571863e-01   aics =     1107.957
   pooled model : ( np = 400 )
      mp = 9   sdp =  8.775778e-01   aicp =     1102.915
 ***  pooled model accepted   ***

<<< new data ( n = 411 --- 610 ) >>>
   switched model : ( nf = 400,  ns = 200 )
      ms = 8   sds =  7.353224e-01   aics =     1627.001
   pooled model : ( np = 600 )
      mp = 9   sdp =  8.567912e-01   aicp =     1629.990
 ***  switched model accepted   ***

<<< new data ( n = 611 --- 810 ) >>>
   switched model : ( nf = 200,  ns = 200 )
      ms = 4   sds =  2.372409e+01   aics =     1734.960
   pooled model : ( np = 400 )
      mp = 10   sdp =  1.255320e+01   aicp =     2169.141
 ***  switched model accepted   ***

<<< new data ( n = 811 --- 1010 ) >>>
   switched model : ( nf = 200,  ns = 200 )
      ms = 4   sds =  2.701266e+01   aics =     2447.710
   pooled model : ( np = 400 )
      mp = 10   sdp =  2.468140e+01   aicp =     2439.571
 ***  pooled model accepted   ***

<<< new data ( n = 1011 --- 1210 ) >>>
   switched model : ( nf = 400,  ns = 200 )
      ms = 9   sds =  4.807289e+01   aics =     3801.690
   pooled model : ( np = 600 )
      mp = 10   sdp =  3.864933e+01   aicp =     3917.444

 ***  switched model accepted   ***

<<< new data ( n = 1211 --- 1410 ) >>>
   switched model : ( nf = 200,  ns = 200 )
      ms = 9   sds =  3.470873e+01   aics =     2659.093
   pooled model : ( np = 400 )
      mp = 8   sdp =  4.308581e+01   aicp =     2658.428

 ***  pooled model accepted   ***

<<< new data ( n = 1411 --- 1610 ) >>>
   switched model : ( nf = 400,  ns = 200 )
      ms = 10   sds =  1.764112e+01   aics =     3822.050
   pooled model : ( np = 600 )
      mp = 8   sdp =  3.582855e+01   aicp =     3867.973

 ***  switched model accepted   ***

<<< new data ( n = 1611 --- 1810 ) >>>
   switched model : ( nf = 200,  ns = 200 )
      ms = 9   sds =  1.032457e+01   aics =     2218.103
   pooled model : ( np = 400 )
      mp = 10   sdp =  1.447380e+01   aicp =     2226.087

 ***  switched model accepted   ***
```

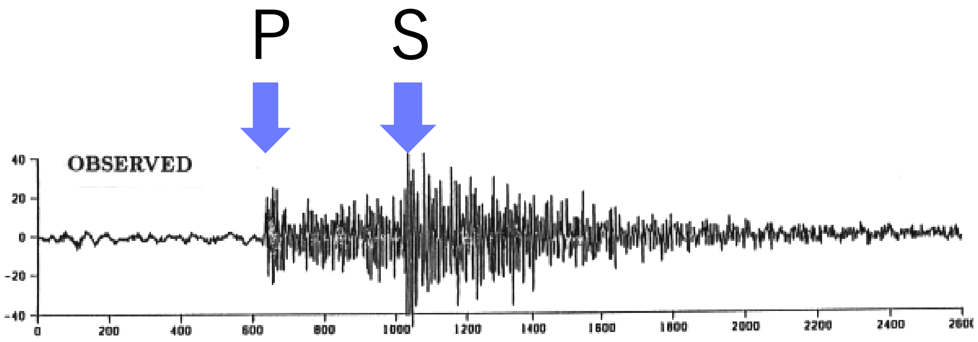


data(MYE1F)
lsar (MYE1F,max.arorder=10, ns0=200)

MYE1F(地震波東西方向)データ

- P波，S波の到着を適切に検出している．AICの違いも大きい
  - P波到着時(n=611)　ΔAIC=434.1，AICs=1735.0, AICp=2169.1
  - S波到着時(n=1011) ΔAIC=115.7，AICs=3801.7, AICp=3917.4
- N=411は誤検出かもしれないが，P波のスペクトルが多少増加している可能性もある．ΔAIC=5.0と小さい．
- 長周期(f=0付近)のパワーはほぼ $p(f)$=2.0で一貫している．
- S波到着後，パワーの減少に伴ってモデルが頻繁に変更されている．$f(0)$は一定の一方，f=0.1~0.3のパワーが段々減少しているので，一定のモデルと見なすにはモデルの工夫が必要．

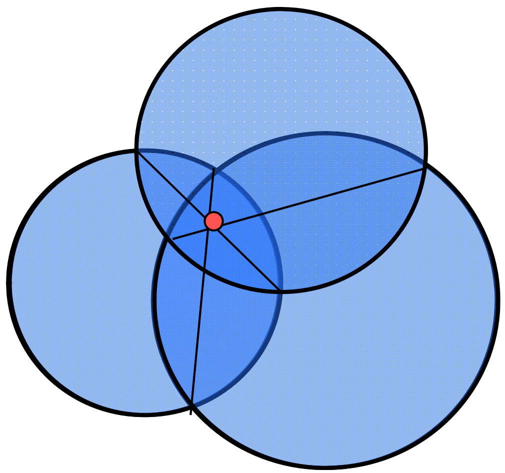
地震波到着時刻の推定



到着時刻の推定

$\Delta T = 0.01\,\mathrm{sec.}$

震源の推定



津波の予測・地震警報

自動・高速アルゴリズム

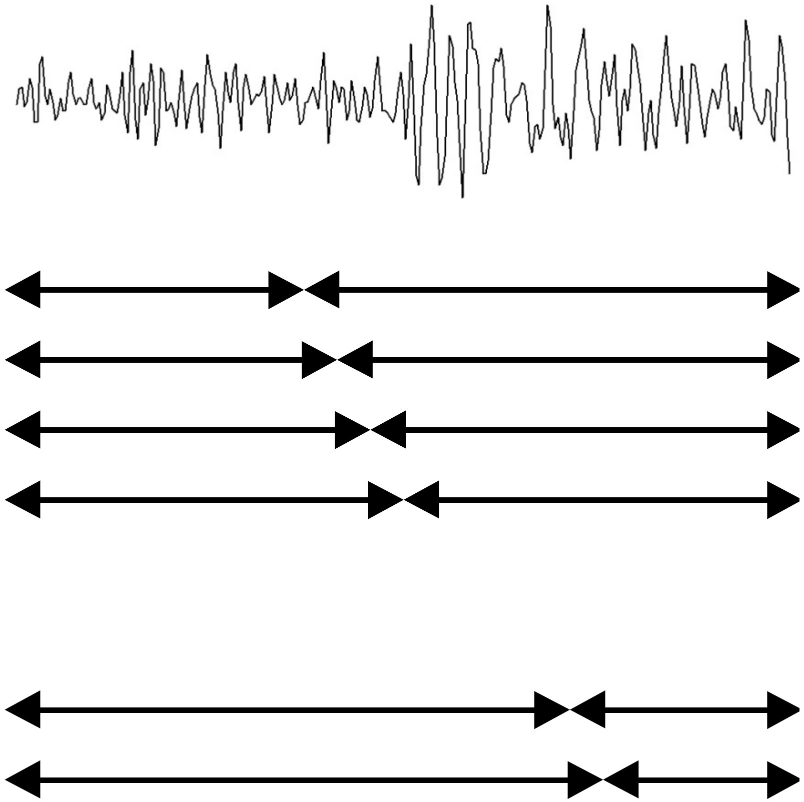
局所定常 AR モデル

＋

情報量規準AICによる
自動的モデリング

変化時点の精密な推定

AIC_0^L AIC_1^L AIC_2^L



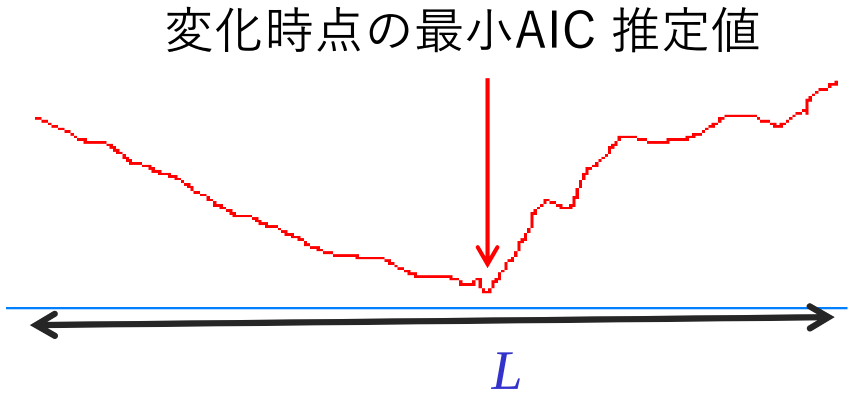
AIC_0^R AIC_1^R AIC_2^R

$\mathrm{AIC}_{\ell\text{-}1}^L$ AIC_ℓ^L

$\mathrm{AIC}_{\ell\text{-}1}^R$ AIC_ℓ^R

全体のモデルのAIC

$$\mathrm{AIC}_j = \mathrm{AIC}_j^L + \mathrm{AIC}_j^R$$



AIC_j^L 前半のモデル

$$y_n = \sum_{i=1}^{m_j} a_{ij} y_{n-i} + v_{nj}$$

$$v_{nj} \sim N(0, \sigma_j^2)$$

AIC_j^R 後半のモデル

$$y_n = \sum_{i=1}^{\ell_j} b_{ij} y_{n-i} + u_{nj}$$

$$u_{nj} \sim N(0, \tau_j^2)$$

局所定常 AR モデルのAIC

前半のモデルのAIC

$$\mathrm{AIC}_j^L = \min_m \left\{ j \log(2\pi \hat{\tau}_j^2) + j + 2(m+1) \right\}$$

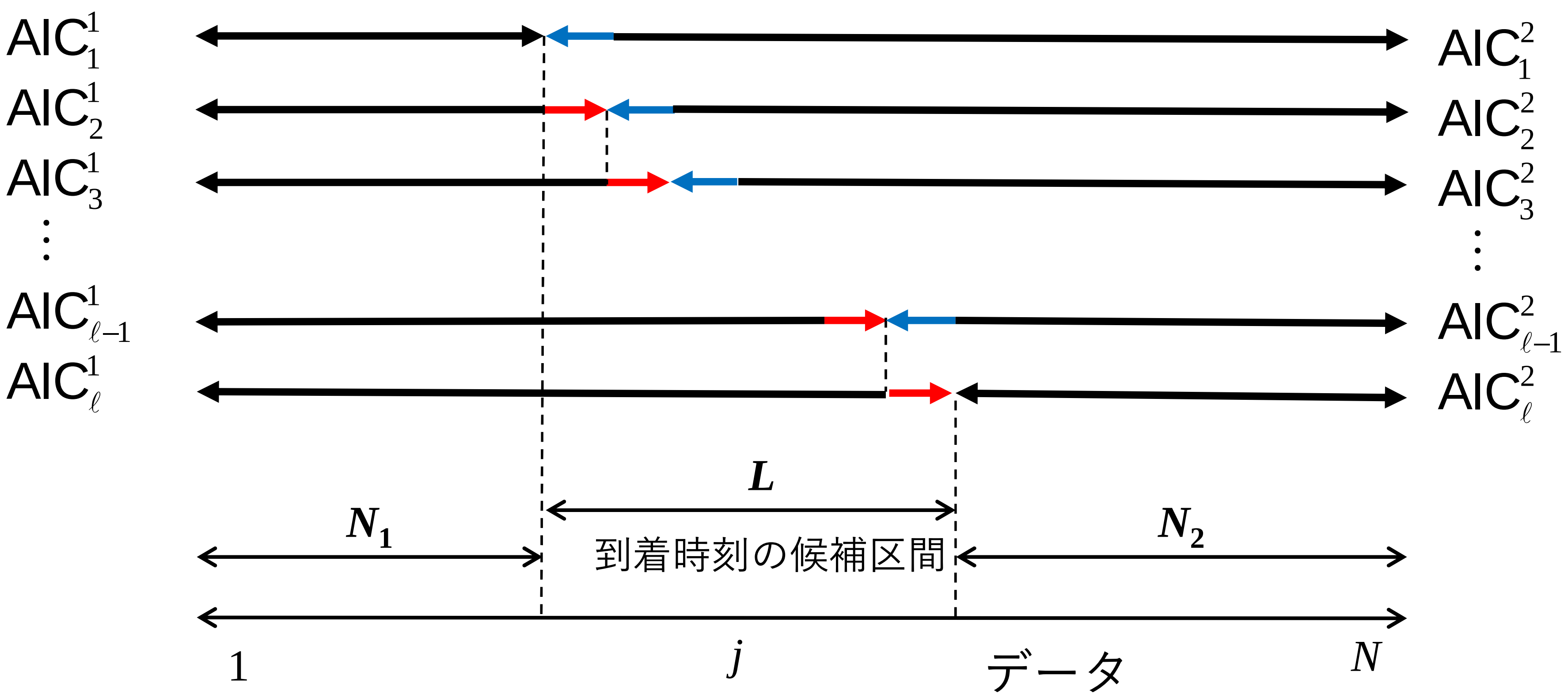
後半のモデルのAIC

$$\mathrm{AIC}_j^R = \min_\ell \left\{ (N-j) \log(2\pi \hat{\sigma}_j^2) + (N-j) + 2(\ell+1) \right\}$$

全体の局所定常ARモデルのAIC

$$\begin{aligned} \mathrm{AIC}_j &= \mathrm{AIC}_j^N + \mathrm{AIC}_j^S \\ &= \min_{m,\ell} \left\{ j \log(2\pi \hat{\tau}_j^2) + (N-j) \log(2\pi \hat{\sigma}_j^2) + N + 2(m+\ell+2) \right\} \end{aligned}$$

データの逐次追加



$$N = N_1 + L + N_2$$

$$\mathrm{AIC}_j = \mathrm{AIC}_j^1 + \mathrm{AIC}_j^2$$

データの逐次追加

2m個のARモデルをL 回推定 ➡ 自動処理のための高速化

$2mL$ $(m=10\sim20,\ L=100\sim500)$

$$X_{10}=[Z\,|\,y]=\begin{bmatrix} y_m & \cdots & y_1 & y_{m+1} \\ y_{m+1} & \cdots & y_2 & y_{m+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{N_1-1} & \cdots & y_{N_1-m} & y_{N_1} \end{bmatrix}$$

➡

$$HX_{10}=\begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & s_{m+1,m+1} \\ & O & \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_1^2(j)=\frac{1}{N_1-m}\sum_{i=j+1}^{m+1} s_{i,m+1}^2$$

$$\mathrm{AIC}_1(j)=(N_1-m)\log\hat{\sigma}_1^2(j)+2(j+1)$$

$$\mathrm{AIC}_1^1\equiv\min_j \mathrm{AIC}_1(j)$$

計算量は加減, 乗除
それぞれ N_1m^2 程度

データの逐次追加

$$X_{11}=\left[\begin{array}{cccc} s_{1,1} & \cdots & s_{1,m} & s_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & s_{m,m} & s_{m,m+1} \\ & & & s_{m+1,m+1} \\ \hline y_{N_1} & \cdots & y_{N_1-m+1} & y_{N_1+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_{N_1+p-1} & \cdots & y_{N_1-m+p} & y_{N_1+p} \end{array}\right] \quad \updownarrow p$$

$$\Rightarrow \quad H_1 X_{11} = \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} r_{11} & \cdots & r_{1,m} & r_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & r_{m,m} & r_{m,m+1} \\ & & & r_{m+1,m+1} \\ \hline & & O & \end{array}\right]$$

p は1でもよい

$$\hat{\sigma}_1^2(j) = \frac{1}{N_1 - m + p} \sum_{i=j+1}^{m+1} r_{i,m+1}^2$$

$$\mathrm{AIC}_1(j) = (N_1 - m + p)\log \hat{\sigma}_1^2(j) + 2(j+1)$$

$$\mathrm{AIC}_1^1 \equiv \min_j \mathrm{AIC}_1(j)$$

計算量は加減, 乗除
それぞれ $2m^2$ 程度
$(p=1)$ の場合

これを繰り返して $\quad \mathrm{AIC}_0^1 \Rightarrow \mathrm{AIC}_1^1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathrm{AIC}_{L/p}^1$

データの逐次追加（後半のモデル）

$$X_{20} = [Z\,|\,y] = \begin{bmatrix} y_{N-1} & \cdots & y_{N-m} & y_N \\ y_{N-2} & \cdots & y_{N-m-1} & y_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{N-N_2} & \cdots & y_{N-N_2-m+1} & y_{N-N_2+1} \end{bmatrix}$$

$$H_{20}X_{20} = \begin{bmatrix} T \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & t_{m+1,m+1} \\ & O & \end{bmatrix}$$

$$X_{21} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1,m} & t_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & t_{m,m} & t_{m,m+1} \\ & & & t_{m+1,m+1} \\ y_{N-N_2-1} & \cdots & y_{N-N_2-m} & y_{N-N_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_{N-N_2-p} & \cdots & y_{N-N_2-m+p-1} & y_{N-N_2-p+1} \end{bmatrix}$$

$$H_{21}X_{21} = \begin{bmatrix} Z \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1,m} & z_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & z_{m,m} & z_{m,m+1} \\ & & & z_{m+1,m+1} \\ & & O & \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_2^2(j) = \frac{1}{N_2 - m + p} \sum_{i=j+1}^{m+1} z_{i,m+1}^2$$

$$\mathrm{AIC}_2(j) = (N_2 - m + p)\log \hat{\sigma}_2^2(j) + 2(j+1)$$

$$\mathrm{AIC}_{L/p-1}^2 \equiv \min_j \mathrm{AIC}_2(j)$$

$$\mathrm{AIC}_{L/p}^2 \Rightarrow \mathrm{AIC}_{L/p-1}^2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathrm{AIC}_1^2$$

計算量

- Householder法の単純適用

N行m列の行列の変換 〜 m^2N

一つのLSARモデル 〜 $m^2(N_1+j)+m^2(N_2+L-j) = m^2N$

L個のLSARモデル 〜 m^2NL

- Householder法による逐次追加

初期モデル 〜 $m^2N_1 + m^2N_2$

データ1個の追加 〜 $2m^2$

合計 〜 $m^2N_1 + m^2N_2 + 2Lm^2 = m^2N+Lm^2$

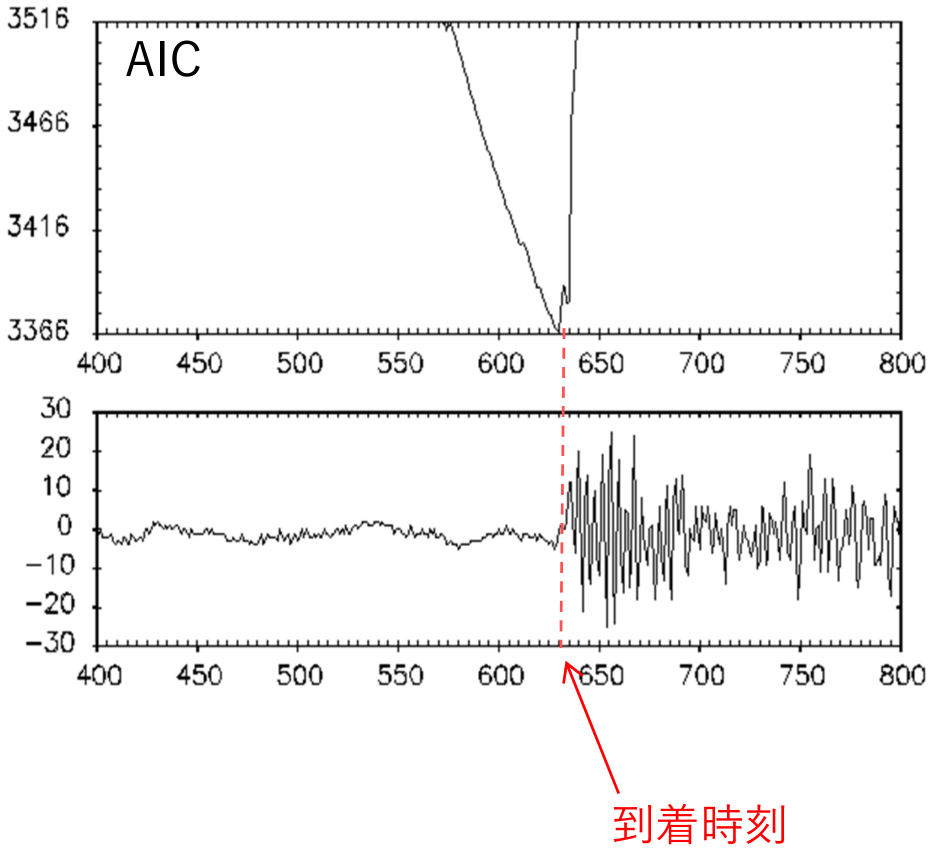
（例）$N = 1000,\quad m = 10,\quad L = 100$ のとき

$$m^2NL = 10^7$$

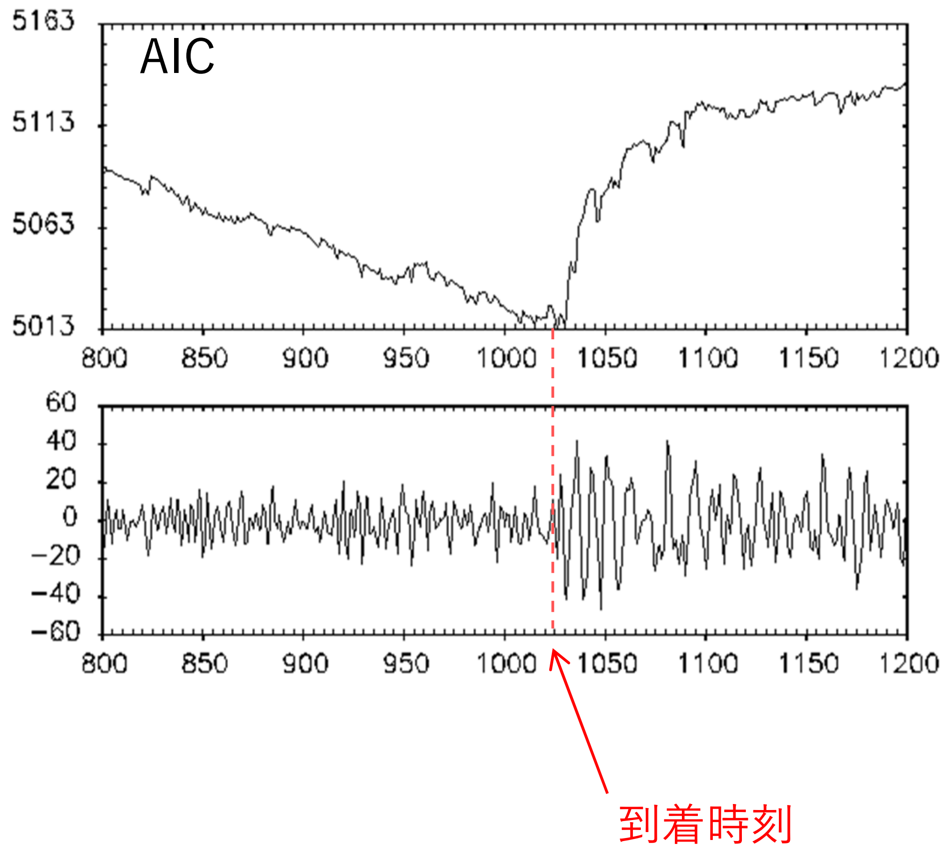
$$m^2N + Lm^2 = 10^5 + 10^4$$

地震波到着時刻の推定

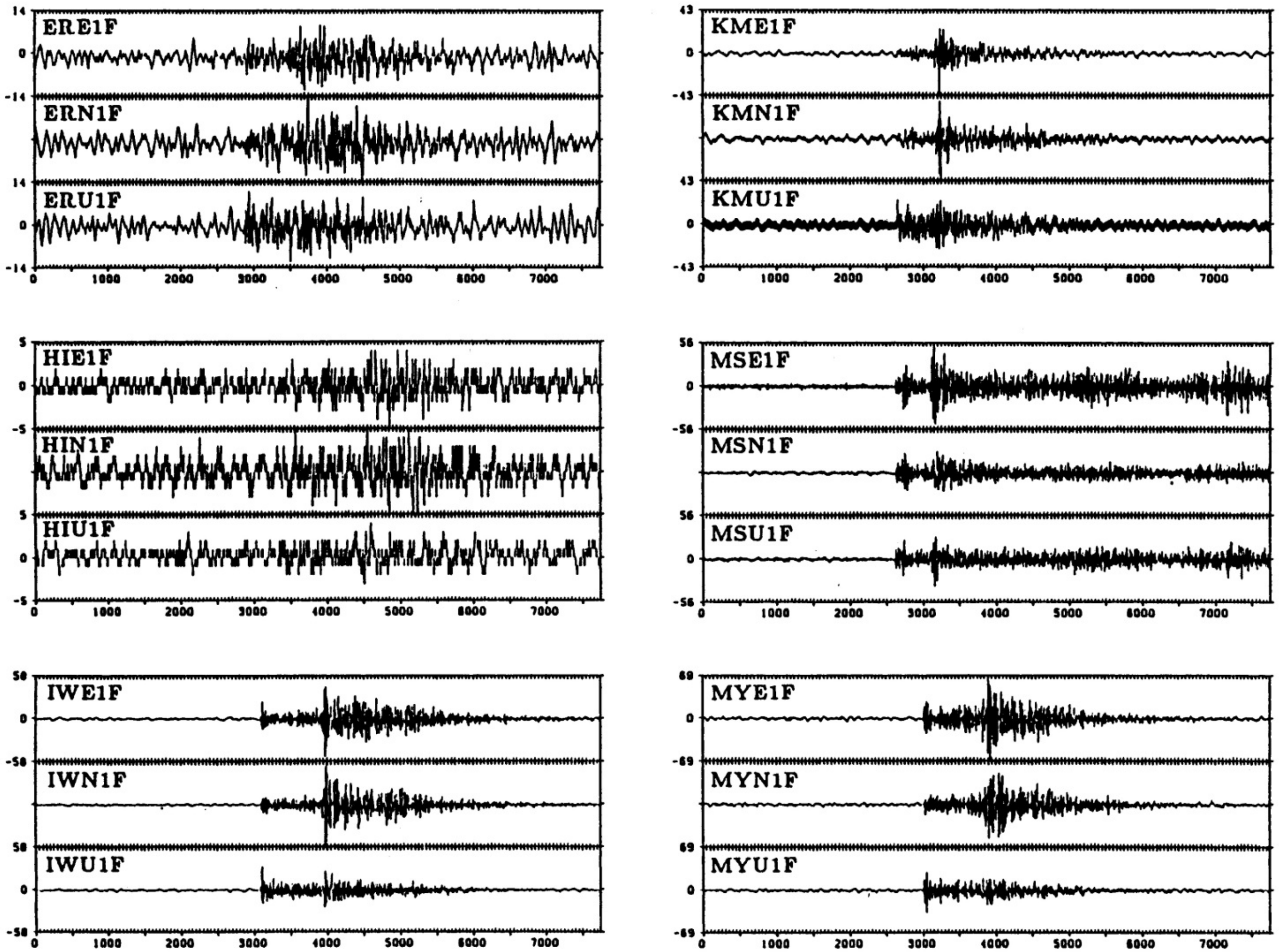
常微動　→　P波



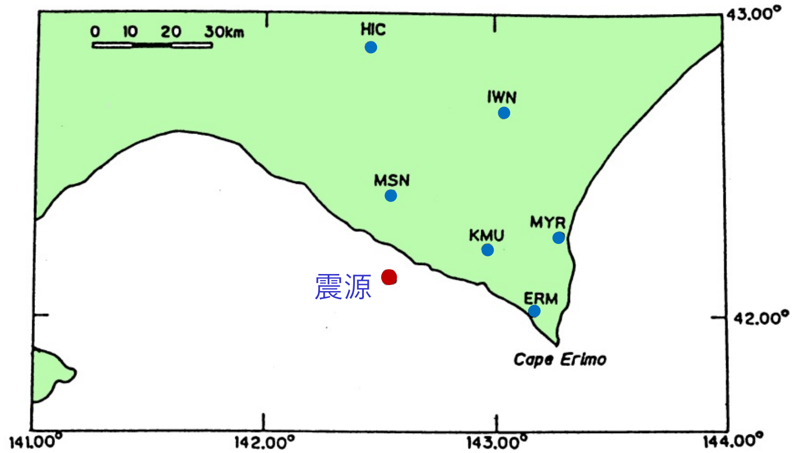
P波　→　S波



地震３成分データ（えりも付近）



ER	えりも
HI	日高
IW	岩内
KM	上杵臼
MS	御園
MY	茂寄
E	E-W成分
N	N-S成分
U	U-D成分



多変量LSARモデル

$$y_n = \begin{bmatrix} y_n^{EW} \\ y_n^{EW} \\ y_n^{EW} \end{bmatrix}$$

東西成分
南北成分
上下成分

$$y_n = \sum_{i=1}^{m_j} A_{ij} y_{n-i} + v_{nj}, \qquad v_{nj} \sim N(0, \Sigma_{1j})$$

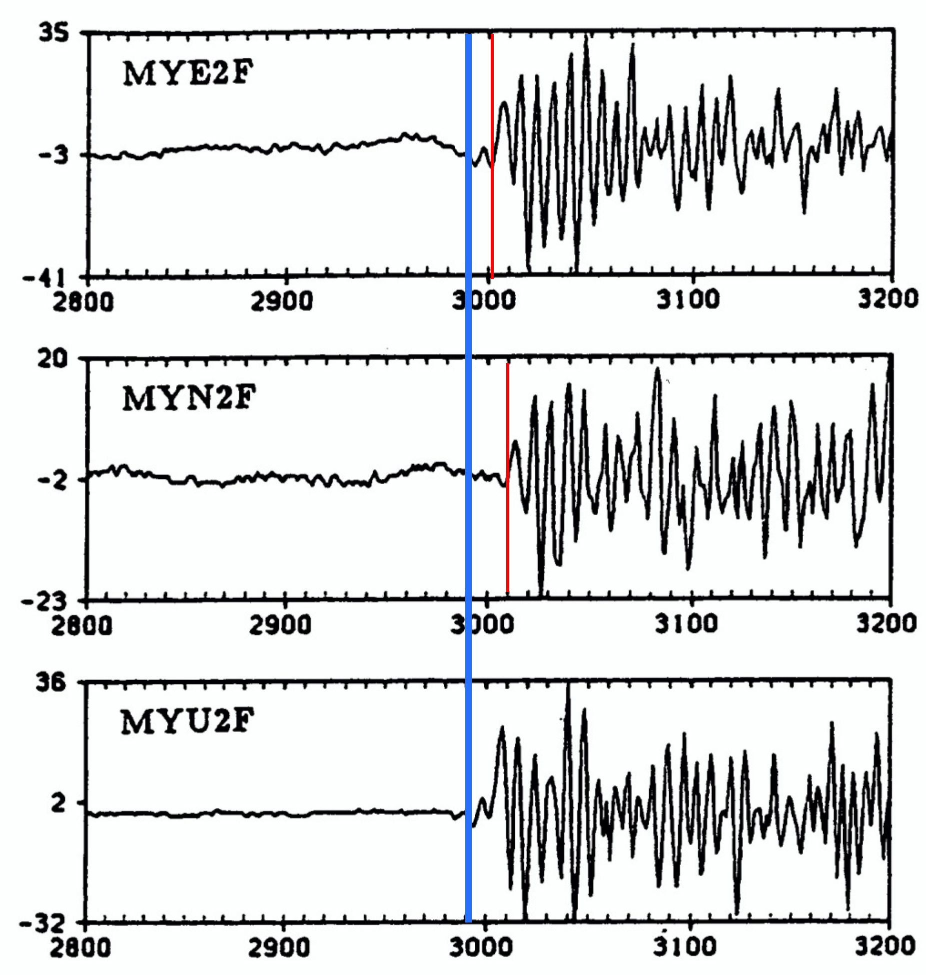
前半のMARモデル

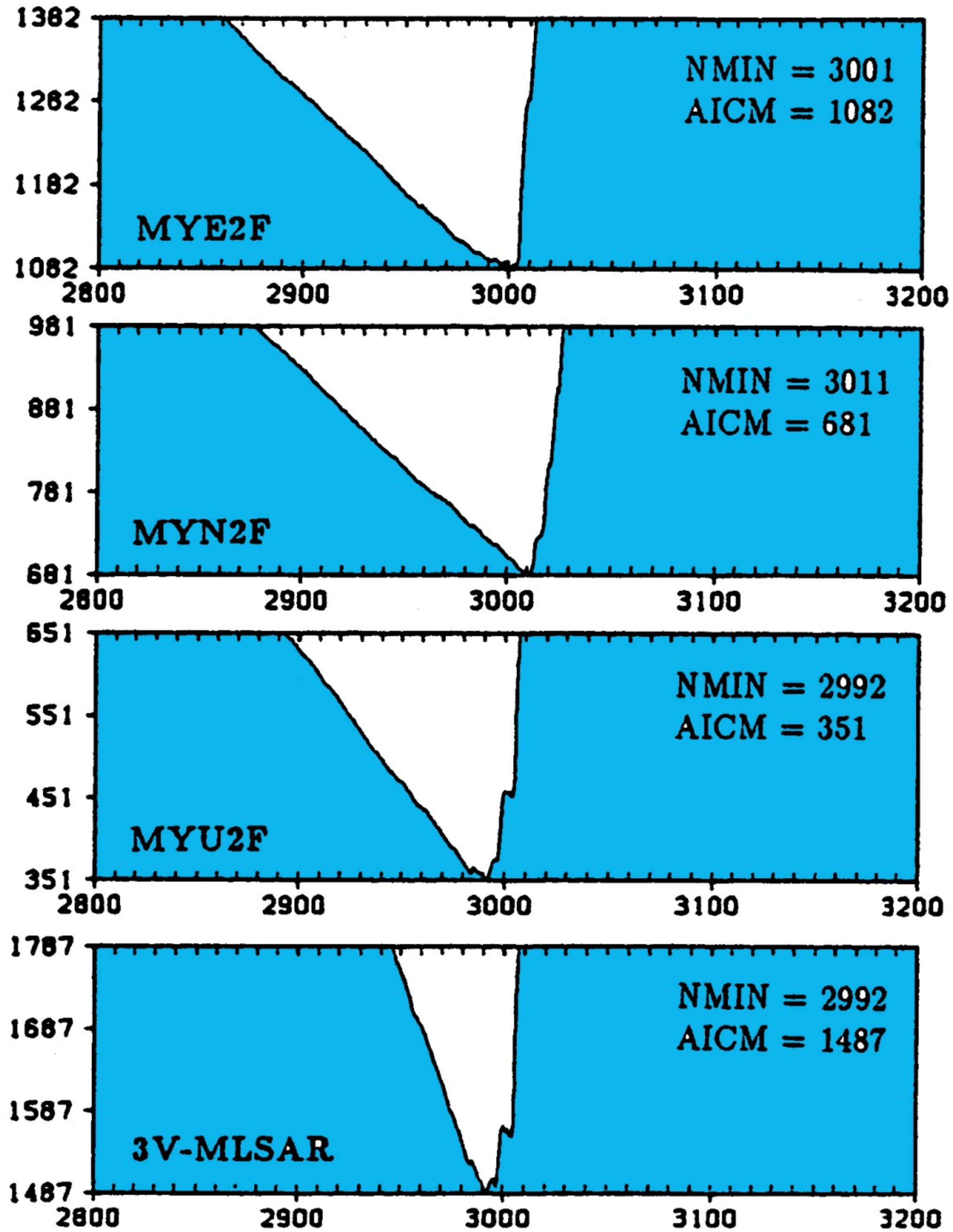
$$y_n = \sum_{i=1}^{\ell_j} B_{ij} y_{n-i} + u_{nj}, \qquad u_{nj} \sim N(0, \Sigma_{2j})$$

後半のMARモデル

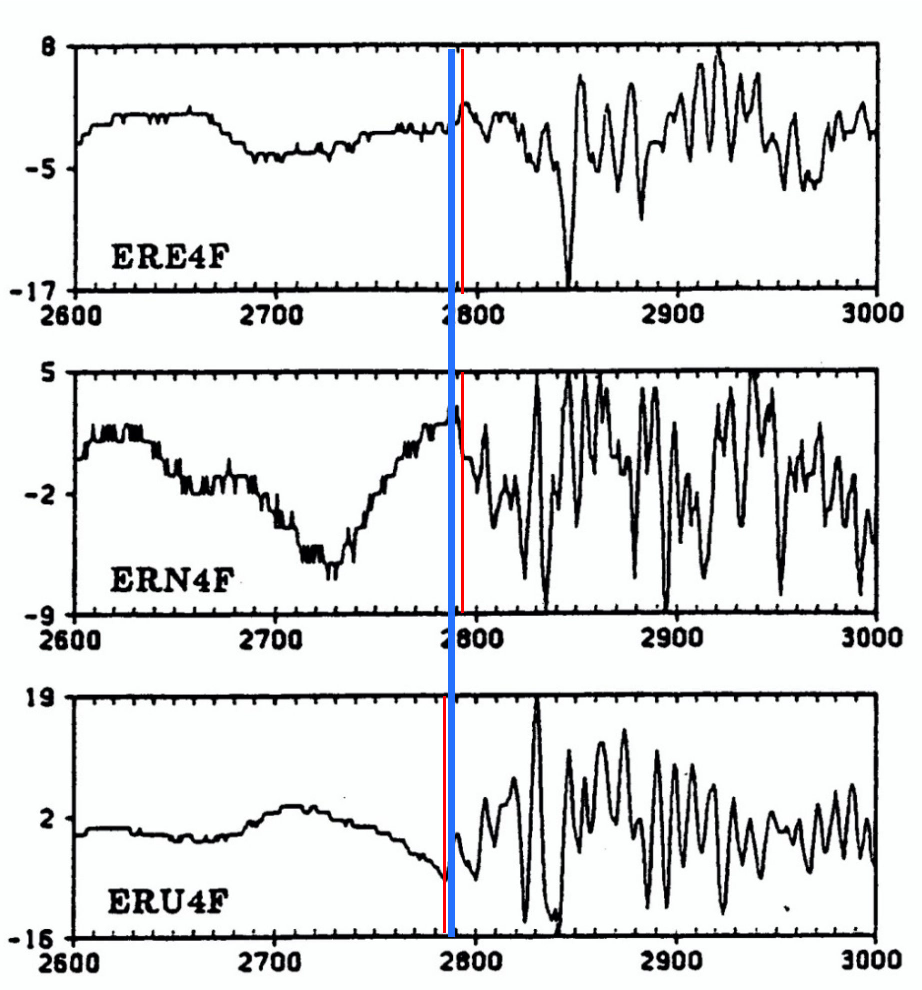
$$\begin{aligned} \mathrm{AIC}_j &= \mathrm{AIC}_j^N + \mathrm{AIC}_j^S \\ &= \ell N \log 2\pi + (N-j)\log|\Sigma_{1j}| + j\log|\Sigma_{2j}| \\ &\quad + \sum_{n=1}^{j} v_{nj}^T \Sigma_{1j}^{-1} v_{nj} + \sum_{n=j+1}^{N} u_{nj}^T \Sigma_{2j}^{-1} u_{nj} \end{aligned}$$

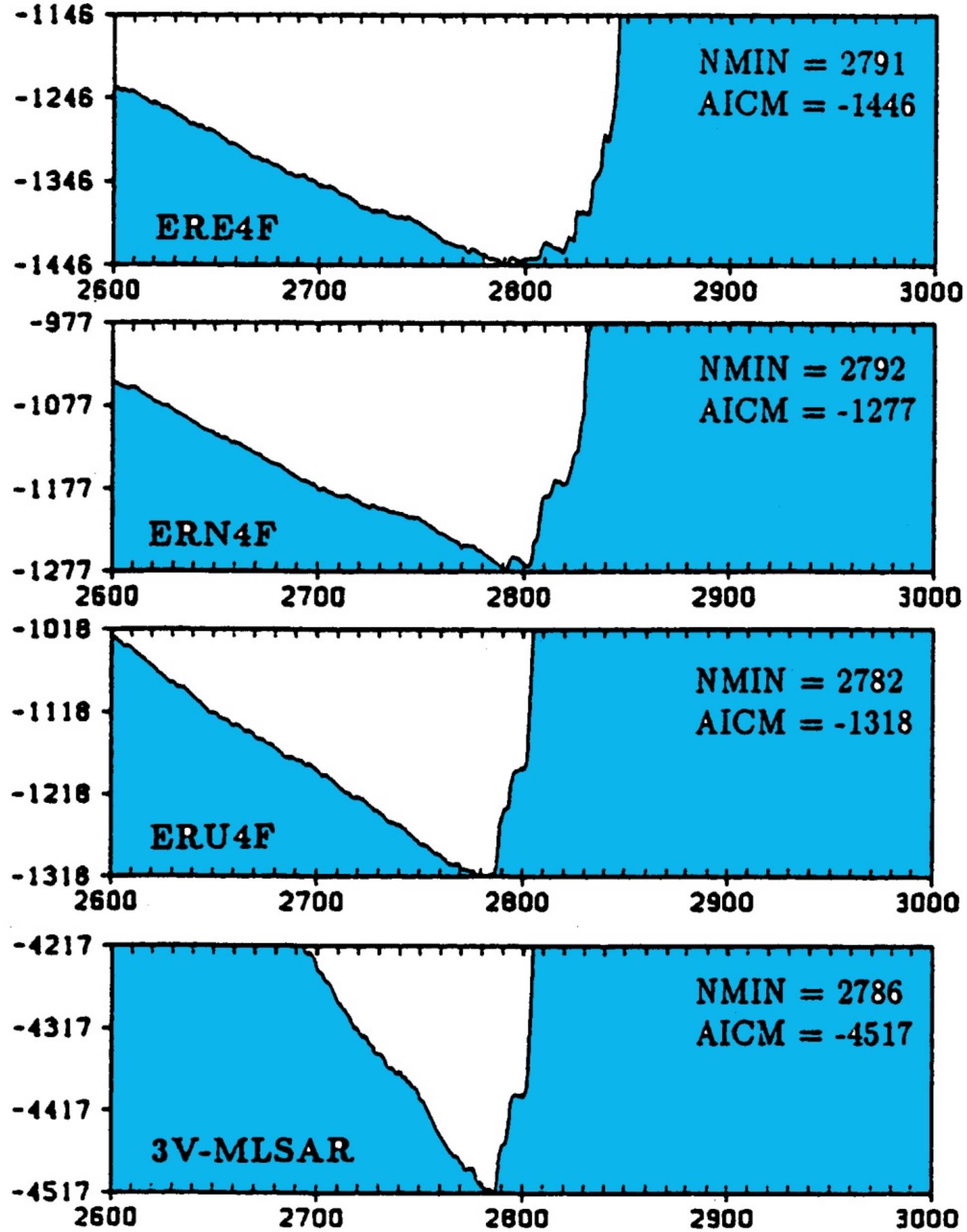
地震３成分データ（茂寄）


MYE2F
MYN2F
MYU2F

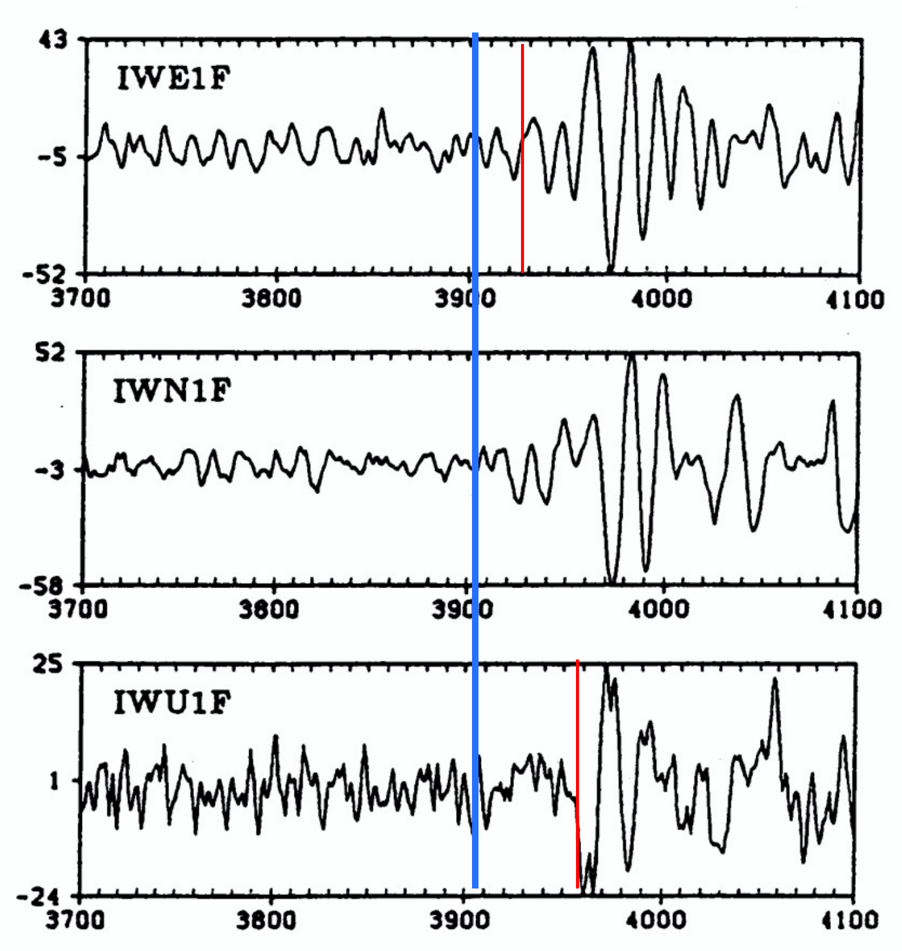

MYE2F
NMIN = 3001
AICM = 1082
MYN2F
NMIN = 3011
AICM = 681
MYU2F
NMIN = 2992
AICM = 351
3V-MLSAR
NMIN = 2992
AICM = 1487

地震３成分データ（えりも）

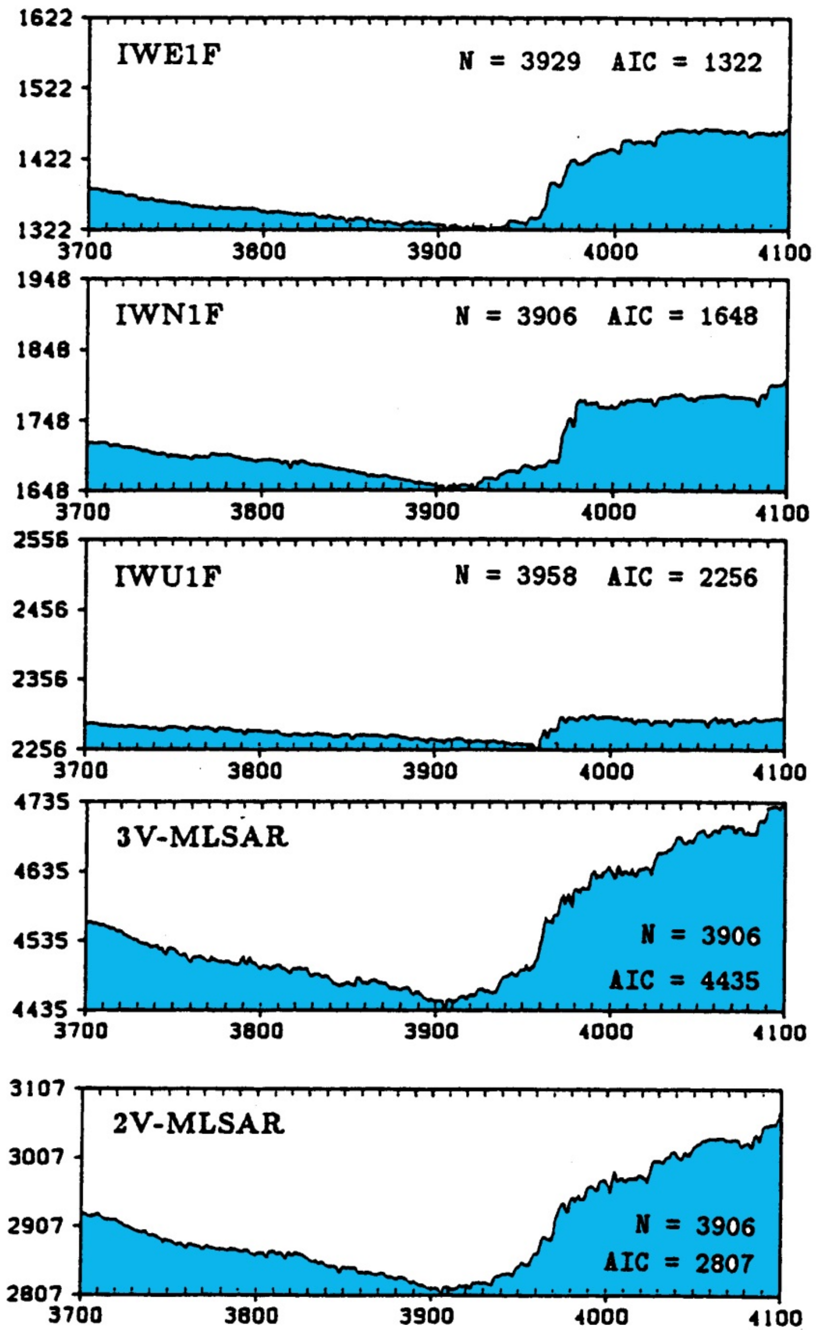




地震３成分データ（岩内）

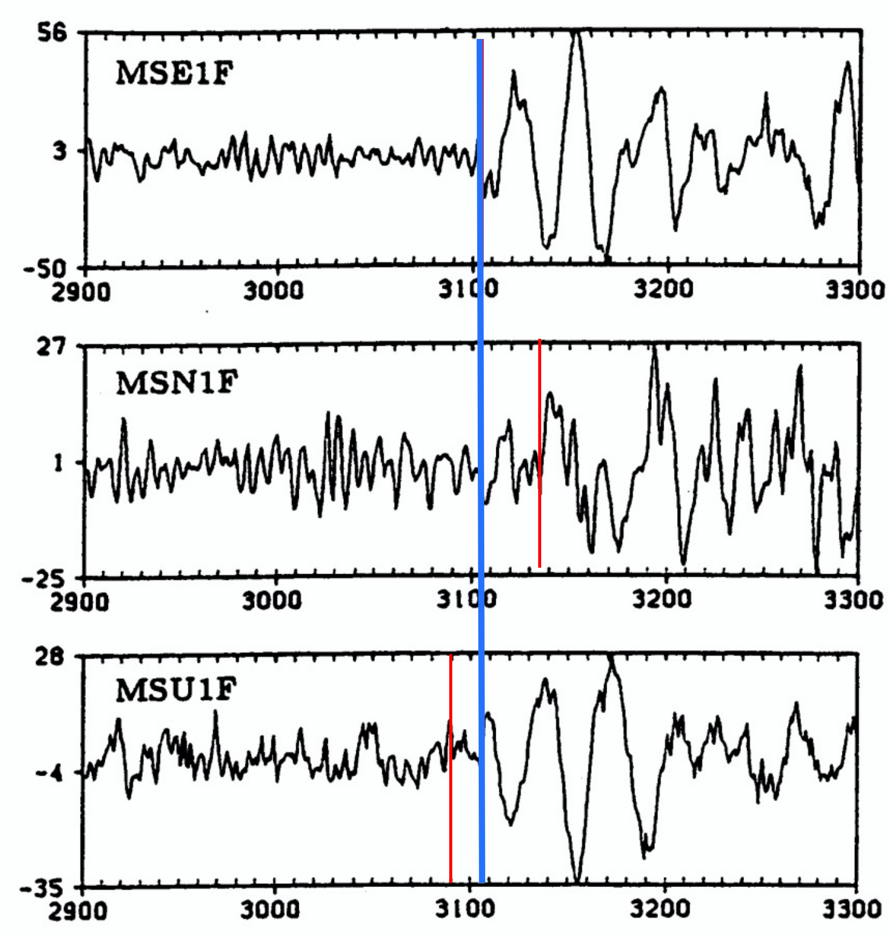


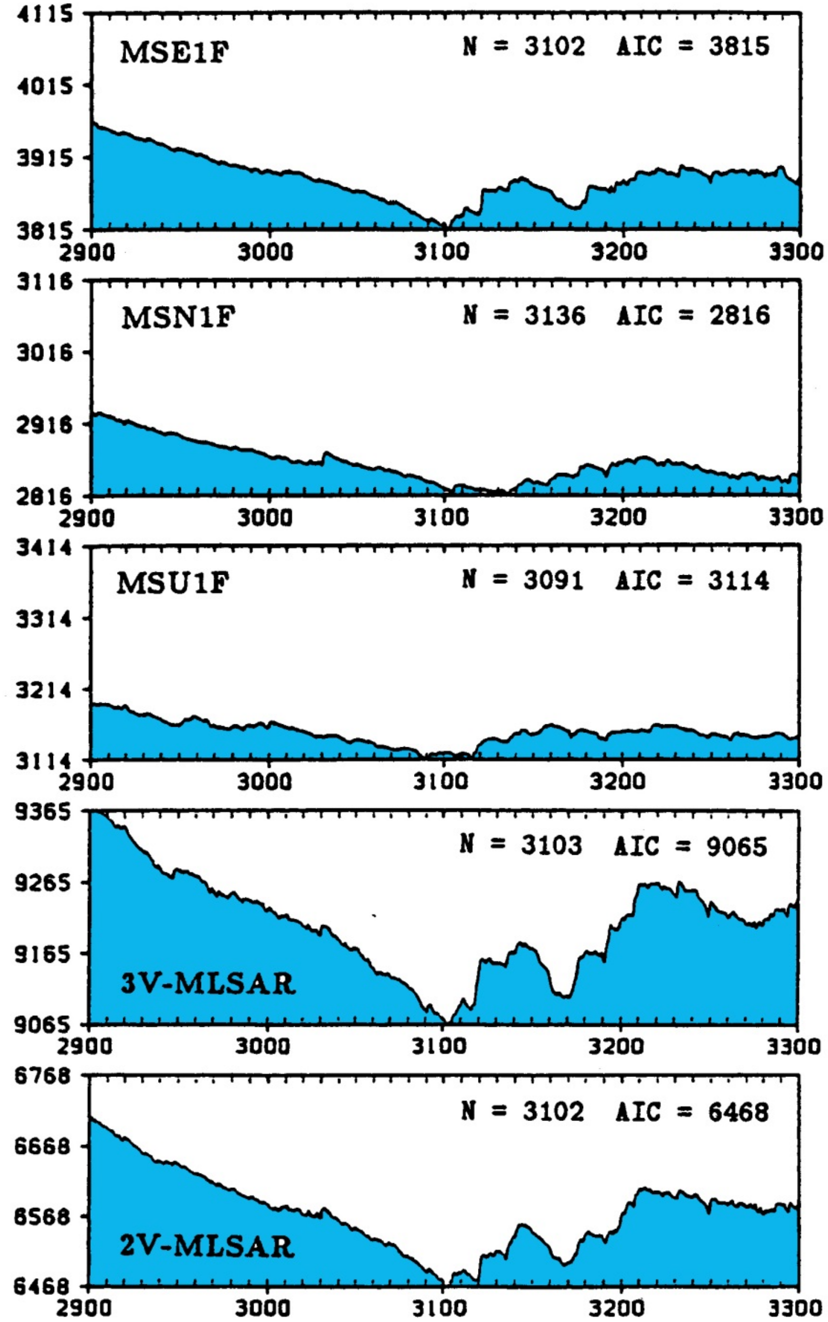
IWE1F
IWN1F
IWU1F



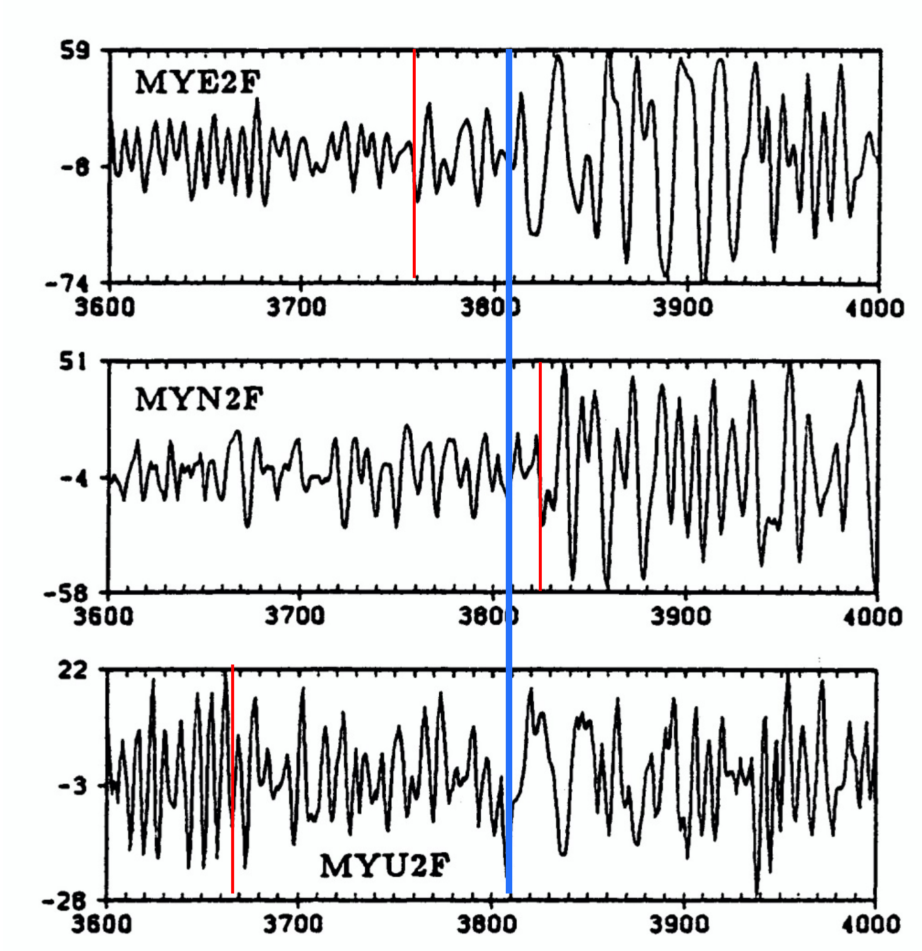
IWE1F
N = 3929 AIC = 1322
IWN1F
N = 3906 AIC = 1648
IWU1F
N = 3958 AIC = 2256
3V-MLSAR
N = 3906
AIC = 4435
2V-MLSAR
N = 3906
AIC = 2807

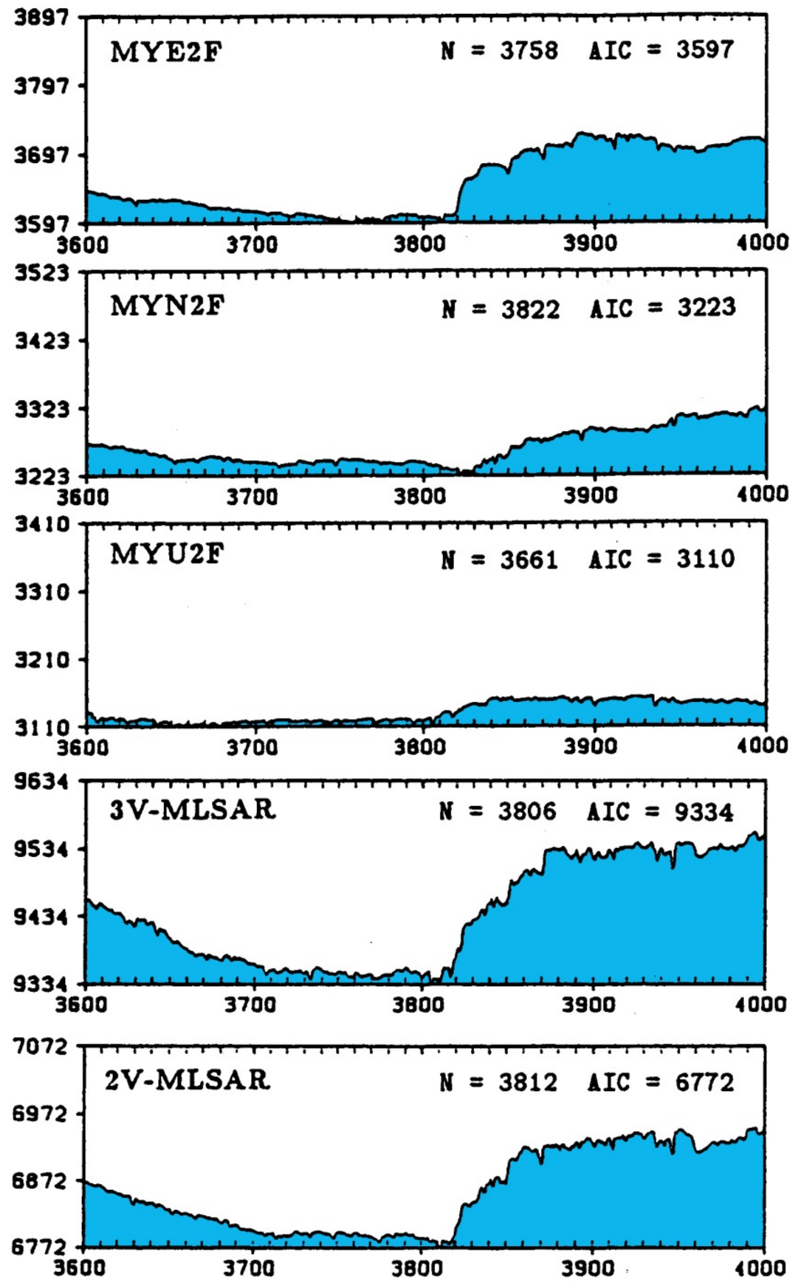
地震 3 成分データ（御園）


MSE1F
MSN1F
MSU1F
56
3
-50
27
1
-25
28
-4
-35
2900
3000
3100
3200
3300


MSE1F
N = 3102 AIC = 3815
MSN1F
N = 3136 AIC = 2816
MSU1F
N = 3091 AIC = 3114
N = 3103 AIC = 9065
3V-MLSAR
N = 3102 AIC = 6468
2V-MLSAR
2900
3000
3100
3200
3300

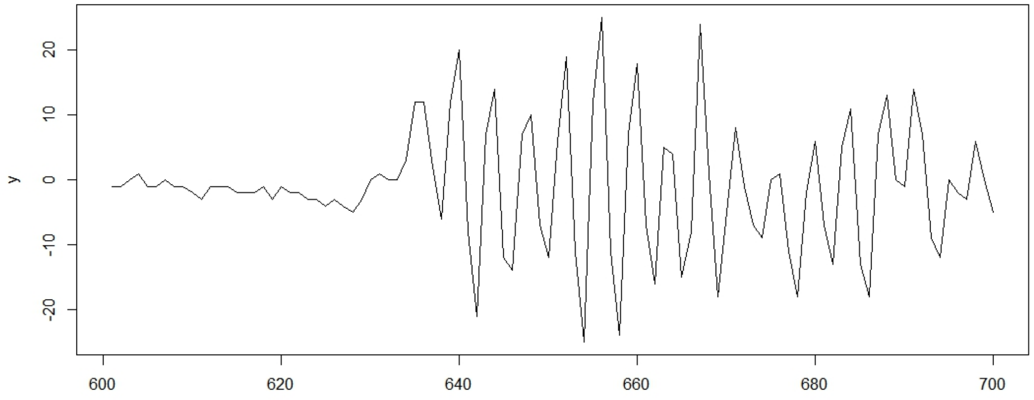
地震３成分データ（茂寄）

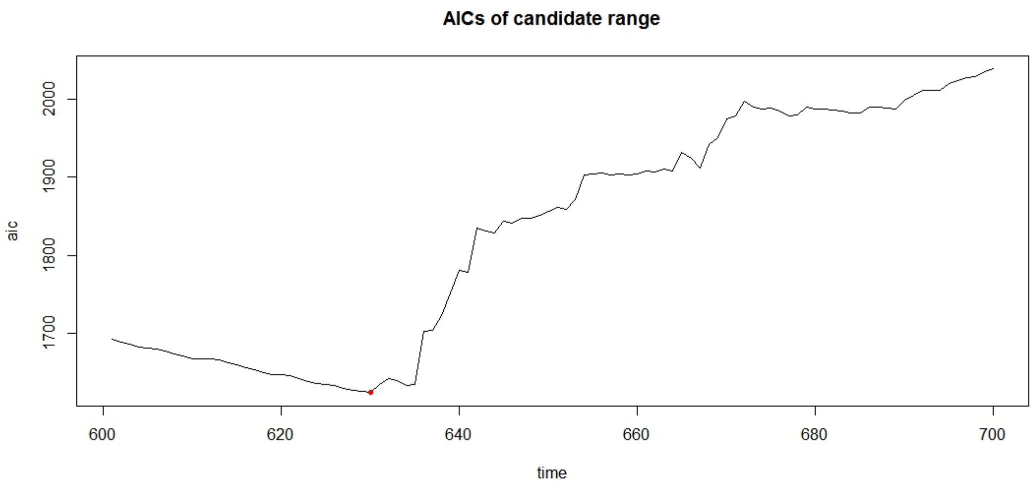

59
MYE2F
-8
-74
3600
3700
3800
3900
4000
51
MYN2F
-4
-58
22
-3
-28
MYU2F


MYE2F
N = 3758 AIC = 3597
3897
3797
3697
3597
MYN2F
N = 3822 AIC = 3223
3523
3423
3323
3223
MYU2F
N = 3661 AIC = 3110
3410
3310
3210
3110
3V-MLSAR
N = 3806 AIC = 9334
9634
9534
9434
9334
2V-MLSAR
N = 3812 AIC = 6772
7072
6972
6872
6772
3600
3700
3800
3900
4000

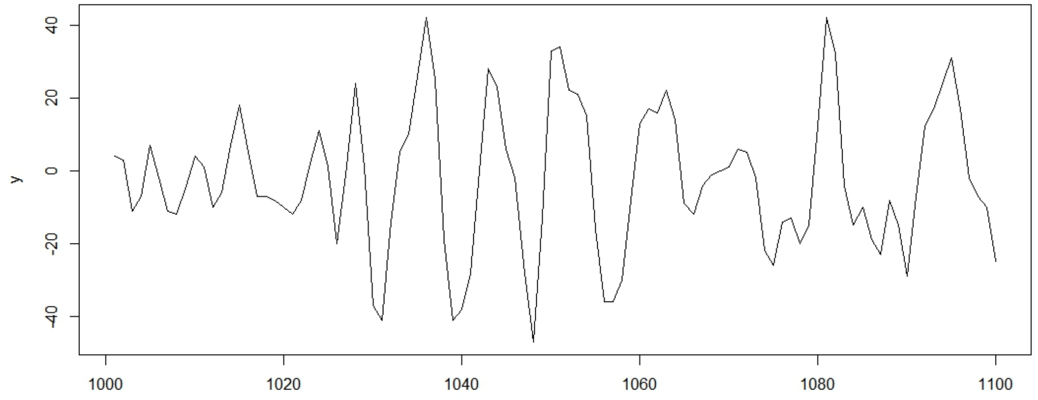
Rによる計算

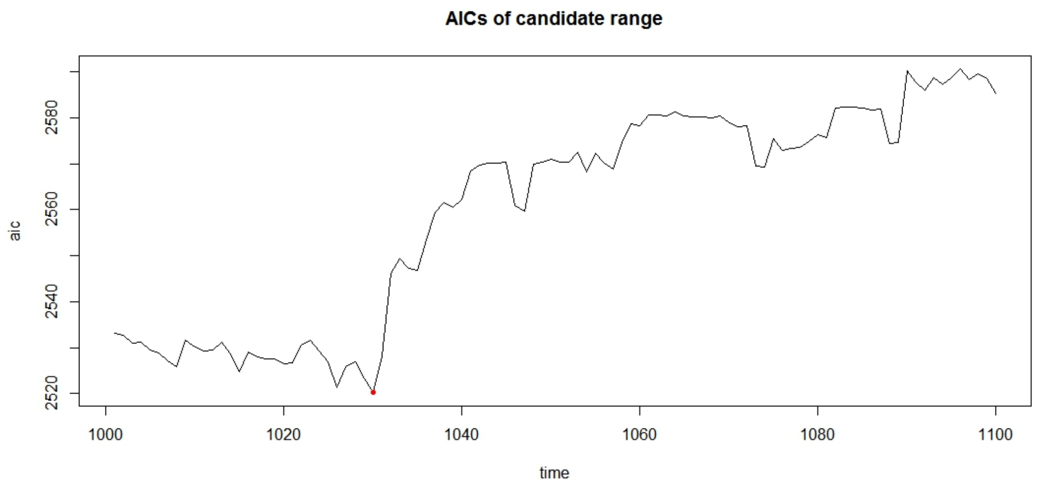
data(MYE1F)
lsar.chgpt(MYE1F, max.arorder = 10, subinterval = c(400,800), candidate = c(600,700))





data(MYE1F)
lsar.chgpt(MYE1F, max.arorder = 10, subinterval = c(800,1200), candidate = c(1000,1100))





緊急地震速報

地震発生

緊急地震速報

産業プラントの
安全確保

交通制御
新幹線，高速道路
信号機制御
航空機離着陸制限

エレベーター緊急停止
緊急通信回線の確保
水門閉鎖

JR東日本新幹線

（JR東日本はやて）

東京－新青森間：震災時27本が営業運転中
新白河－二戸間：10本（5本は270キロ走行中）
東北新幹線の被害箇所：約1,200

新幹線早期地震検知システム

東北・上越・長野新幹線の沿線と海岸線に97個の地震計を設置
P波やS波を検知し、変電所から列車への送電を自動的に停止
車両の非常ブレーキを作動させて減速・停止させる

- 14時47分3秒牡鹿半島の地震計：120ガルの加速度を検知。自動的に架線を停電、新幹線は一斉に非常ブレーキをかけて減速，緊急停止
- 仙台駅-古川駅：「はやて27号」「やまびこ61号」が走行中。
  非常ブレーキの9秒後，12秒後に初動，1分10秒後に最も強い揺れが起きた。
- 営業運転中の新幹線は１本も脱線・転覆しなかった。

問 題 点

- 震源推定の誤差
  - ✓ 少数の地震波に基づいて推定
  - ✓ 一部の到着時刻推定の誤差が大きな影響を及ぼす

- 緊急地震速報の誤動作
  - ✓ 主な原因： 引き続いて発生した2つの小さな地震を同一の地震と見做したこと

◆ 対応
  - ✓ 多数の観測点の情報を使う
  - ✓ 到着時刻の推定値だけでなく，事後確率を使う

変化点の事後確率

AIC ＝ － 2 ×（バイアス補正した対数尤度）

$$p(y\,|\,j) \equiv \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{AIC}_j\right\}$$

最尤法でパラメータ推定した
モデルの尤度

$p(j)$　　変化点の事前確率（例；$p(j) = \dfrac{1}{L}$）

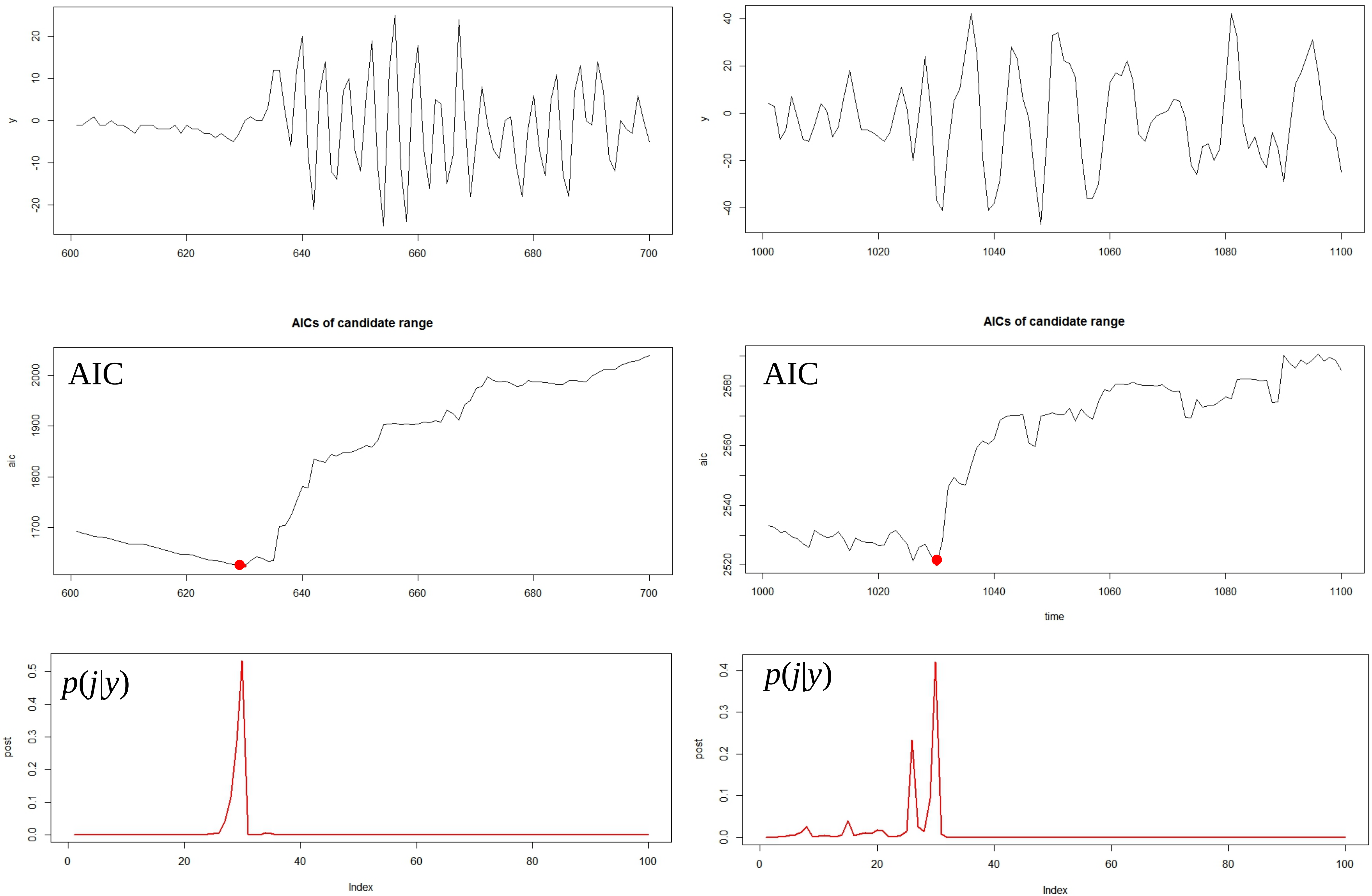
変化点の事後確率

$$p(j\,|\,y) = \frac{p(y\,|\,j)\,p(j)}{\sum_{j=1}^{L} p(y\,|\,j)\,p(j)}$$

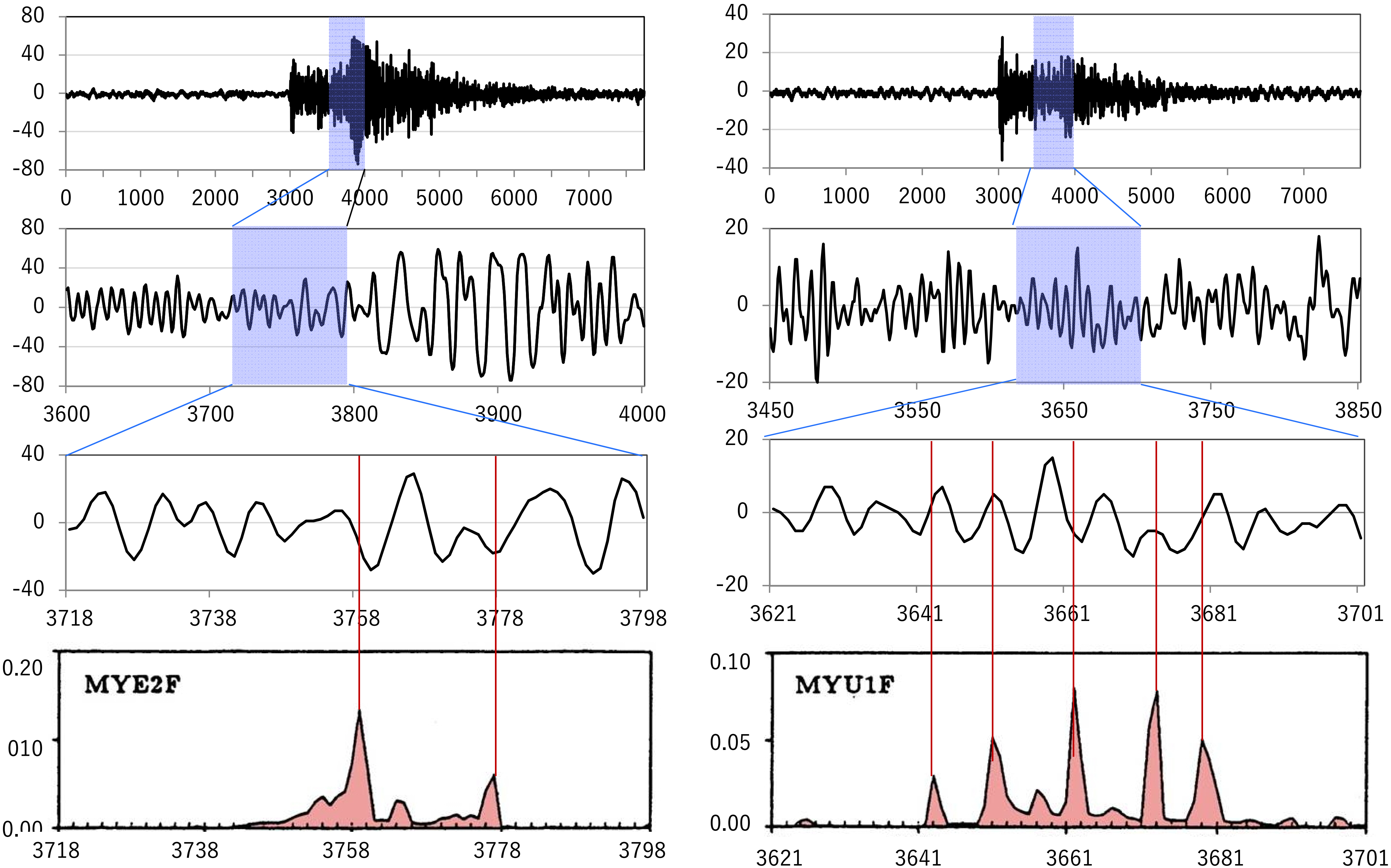
```
x <- lsar2(MYE1F, 10, c(400,800), c(600,700))
AICP <- x$aic
post <- exp( -(AICP-min(AICP))/2 )
post <- post/sum(post)
plot( post, type="l", col="red“ )
```

変化点の事後確率

```
x <- lsar2(MYE1F, 10, c(400,800), c(600,700))
AICP <- x$aic
post <- exp( -(AICP-min(AICP))/2 )
post <- post/sum(post)
plot(post,type="l",col="red",lwd=2)
```



変化点の事後確率



80
40
0
-40
-80
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
3600
3700
3800
3900
4000
3718
3738
3758
3778
3798
0.20
010
0.00
MYE2F
40
20
-20
3450
3550
3650
3750
3850
3621
3641
3661
3681
3701
0.10
0.05
MYU1F

統計的制御

- 最適制御の困難
  - 巨大なシステム
  - 複雑なシステム
  - 外乱の強いシステム

理論モデル → 統計的モデル

[成功例]

- 火力発電所
- セメント焼成炉
- 船舶自動操舵

最適制御

- 状態空間モデル

$$x_n = Fx_{n-1} + Gr_n + w_n$$
$$y_n = Hx_n$$

- 評価関数

$$J = \sum_{n=1}^{I} \left\{ x_n^T Q x_n + r_n^T R r_n \right\}$$

- 最適制御

$$r_n = Kx_n$$

制御用状態空間モデル

多変量ARモデル

$$z_n = \sum_{j=1}^{m} A_j z_{n-j} + v_n$$

ARXモデル（X： exogenous）

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} a_j y_{n-j} + \sum_{j=1}^{m} b_j r_{n-j} + u_n$$

制御用状態空間モデル

$$z_n = F x_{n-1} + G r_n + w_n$$

$$y_n = H x_n$$

$$z_n = \begin{bmatrix} y_n \\ \cdots \\ r_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \quad \text{被制御変数} \\ \\ \updownarrow q \quad \text{操作変数} \end{array}$$

$$A_j = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{p}{\longleftrightarrow} & \overset{q}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ * & * \end{bmatrix} \end{array}, \qquad v_n = \begin{bmatrix} u_n \\ * \end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array}$$

$$F = \begin{bmatrix} a_1 & I & & \\ a_2 & & \ddots & \\ \vdots & & & I \\ a_m & & & \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$w_n = \begin{bmatrix} u_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x_n = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_{n-m+1} \end{bmatrix}$$

最適制御則

$$y_n = K_I x_n$$

$$K_I = -\left\{G^T S_I G + R\right\}^{-1} G^T S_I F$$

ただし，S_m $(m=1,\ldots,I)$は以下により求める

1. $P_0 = [0]$

2. $m=1,2,\ldots,I$ について(1), (2)を繰り返す

(1) $S_m = Q + P_{m-1}$

(2) $P_m = F^T \left[S_m - S_m G \left\{G^T S_m G + R\right\}^{-1} G^T S_m \right] F$

最適制御則の導出

$f_m(x)$を以下のように定義する

$$f_m(x) = \min_{r} J_m(z,r) = \min_{\substack{r_0,\ldots,r_{m-1} \\ x_0 = x}} E\left[\sum_{n=1}^{m}\left\{x_n^T Q x_n + r_{n-1}^T R r_{n-1}\right\}\right]$$

最適性の原理より

$$f_m(x) = \min_{\substack{y_0 \\ x_0 = x}}\left[x_1^T Q x_1 + r_0^T R r_0 + \min_{r_{01},\ldots,r_{m-1}} E\left[\sum_{n=2}^{m}\left\{x_n^T Q x_n + r_{n-1}^T R r_{n-1}\right\}\right]\right]$$

$$= \min_{\substack{y_0 \\ x_0 = x}}\left[x_1^T Q x_1 + r_0^T R r_0 + f_{m-1}(x_1)\right]$$

最適制御則の導出（数学的帰納法）

(i) m=1のとき $f_1(x) = \min\limits_{\substack{r_0 \\ x_0 = x}} E\left[x_1^T Q x_1 + r_0^T R r_0 \right]$

$$r_1(x) = -(G^T S_1 G + R)^{-1} G^T S_1 F x$$

$$f_1(x) = x^T P_1 x + \text{定数}$$

(ii) m=k−1のとき定理は成り立つと仮定

$$f_{k-1}(x) = x^T P_{k-1} x + \text{定数}$$

このとき

$$f_k(x) = \min_{\substack{r_0 \\ x_0 = x}} E\left[x_1^T Q x_1 + r_0^T R r_0 + x_1^T P_{k-1} x_1 \right] + \text{定数}$$

$$= \min_{\substack{r_0 \\ x_0 = x}} E\left[x_1^T \left(Q + P_{k-1} \right) x_1 + r_0^T R r_0 \right] + \text{定数}$$

$$r_k = -\left(G^T S_k G + R \right)^{-1} G^T S_k F x_k$$

$$P_k = F^T \left\{ S_k - S_k G \left(G^T S_k G + R \right)^{-1} G^T S_k \right\} F$$

$$f_k(x) = x^T P_k x$$

$z = Fx + Gr + v$ について，評価関数

$J(x,r) = E[x^T Q x + r^T R r]$を最小とする制御入力$r*$およびその時の評価関数値は

$$r*(x) = -(G^T Q G + R)^{-1} G^T Q F x$$

$$f_1(x) = \min_r J(x,r) = J(x, r*) = x^T P x + \text{定数}$$

ただし

$$P = F^T \left\{ Q - QG(G^T Q G + R)^{-1} G^T Q \right\} F$$

$$J(x,r) = E[(Fx + Gr + v)^T Q (Fx + Gr + v) + r^T R r]$$

$$= (Fx + Gr)^T Q (Fx + Gr) + r^T R r + E[v^T Q v]$$

$$= r^T (G^T Q G + R) r + x^T F^T Q G r + r^T G^T Q F x$$

$$+ x^T F^T Q F x + \text{定数}$$

$$= \left\{ r + (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q F x \right\}^T (G^T Q G + R)$$

$$\times \left\{ r + (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q F x \right\} + x^T F Q F x$$

$$- x F^T Q G (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q F x + \text{定数}$$

ここで，第1項は非負，第2項はrと無関係

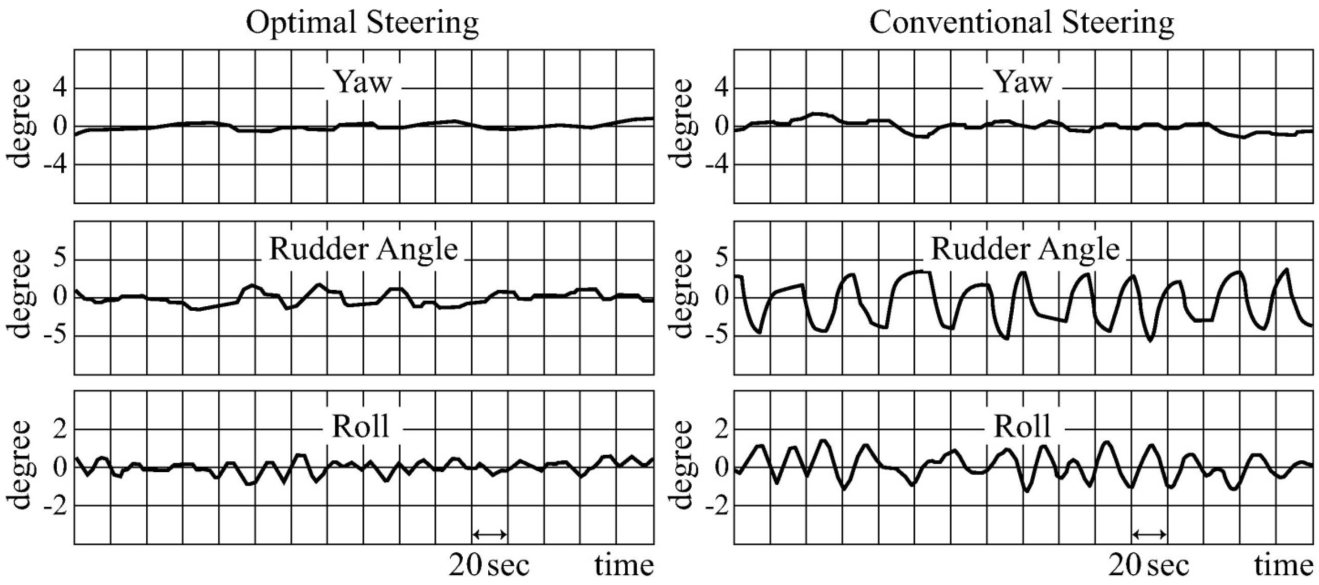
$$r* = -(G^T Q G)^{-1} G^T Q F x$$

のとき上式は最小となり，このとき

$$f(r*) = x^T F^T Q F x$$

$$- x^T F^T Q G (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q F + \text{定数}$$

ARオートパイロット制御結果



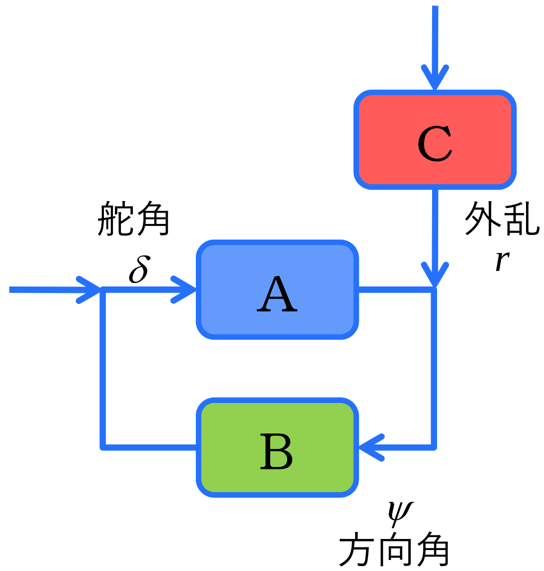
No.	Q	R	Pitch	Roll	Yaw	Yacc	Rudder	Diff.
1	(2,7,35,1)	0.850	1.726	4.575	1.709	0.0063	18.72	4.546
2	(3.6,7,40,1.67)	1.015	1.444	4.915	1.674	0.0062	19.12	5.052
3	(0,6.33,57.8,0)	0.860	2.242	4.473	1.672	0.0068	18.66	4.931
4	Manual		2.771	6.557	7.781	0.0081	17.62	0.832

図表は K. Ohtsu, H. Peng & G. Kitagawa (2015), Time Series modeling for Analysis and Control, Advanced Autopilot and Monitoring Systems, Springer Briefs in Statistics, Springer. P65 およびP67から転載.

NADCONと適応型オートパイロット

北川・赤池・大津 (1980)

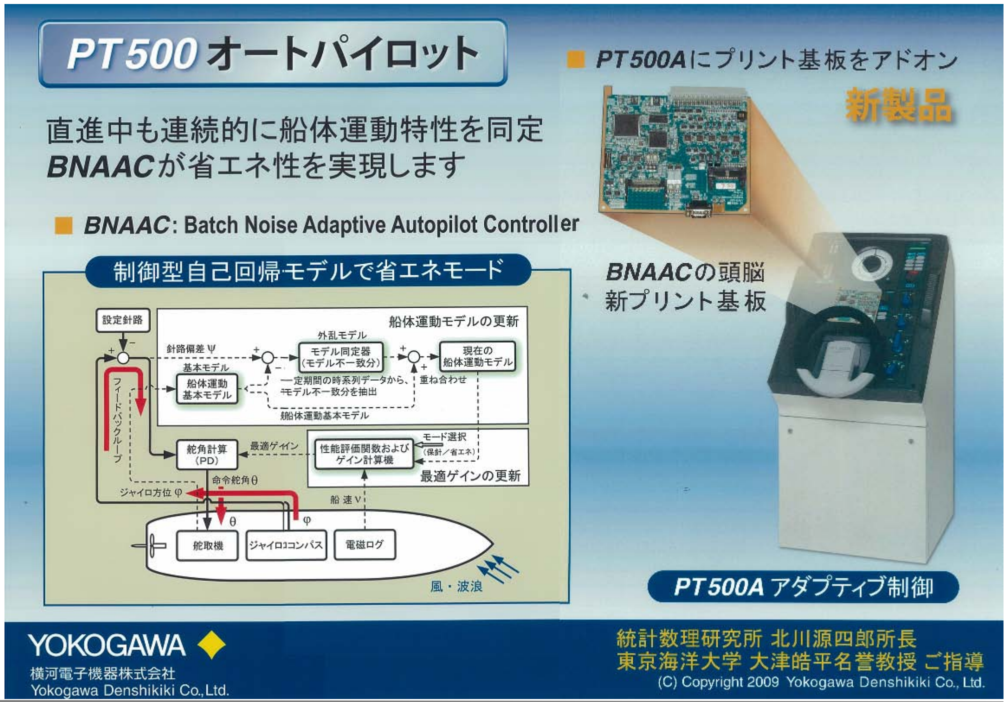
- 船体運動モデル + 外乱モデル
- 外乱モデルに局所定常ARモデルを用いて非定常モデル化
- 外乱の変化に適応する適応制御システムを提案（Noise Adaptive Controller; NADCON)



- ➢ 横河電子機器が大型船舶用主力システムPT500Aに採用 (2008年)
- ➢ 次世代オートパイロットPT900シリーズにBNAACを標準装備

BNAAC：Batch Noise Adaptive Autopilot Controller

https://www.yokogawadenshikiki.co.jp/jp-ydk/mr/marine/pilot/ydkmr-ma-bnaac-ja.htm



NADCON (Noise Adaptive Controller)

船のモデル

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} A_j y_{n-j} + \sum_{j=1}^{m} B_j r_{n-j} + u_n$$

外乱のモデル

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} C_i u_{n-i} + \varepsilon_n$$

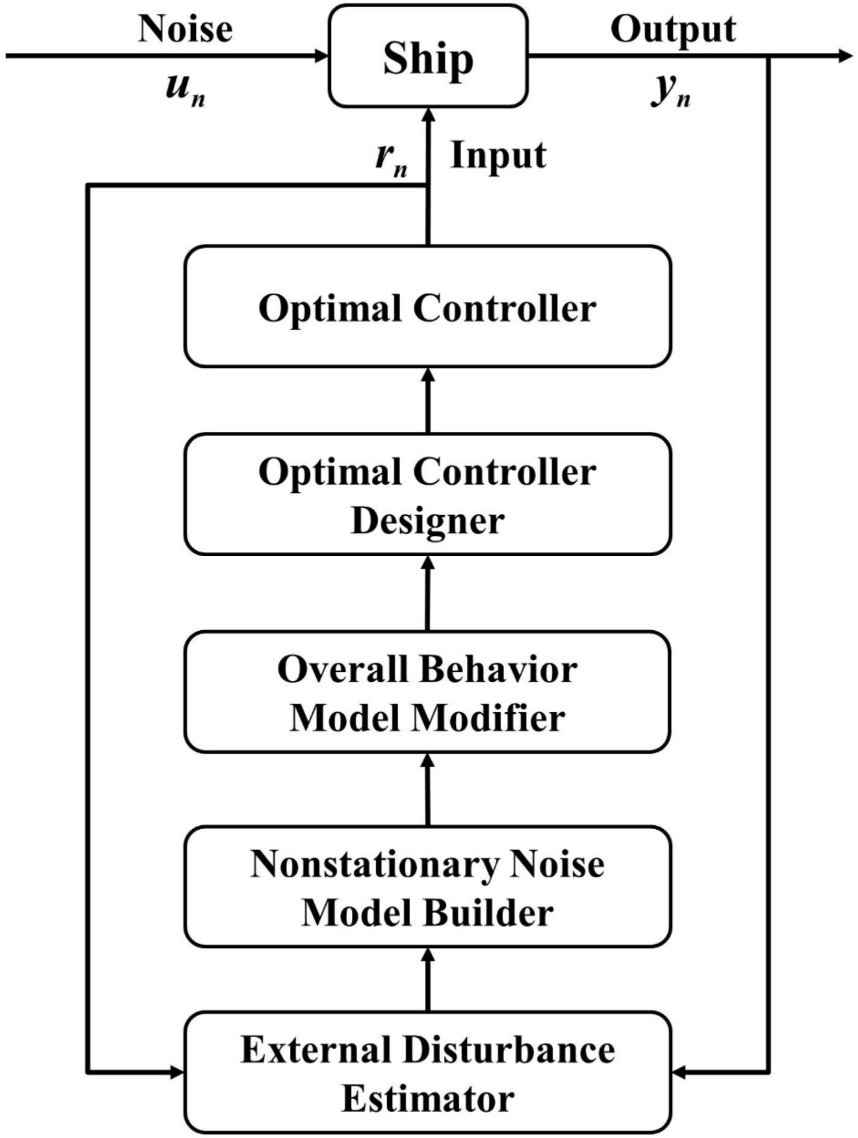
統合モデル（船＋外乱）

$$y_n = \sum_{j=1}^{m+k} A'_j y_{n-j} + \sum_{j=1}^{m+k} B'_j r_{n-j} + \varepsilon_n$$

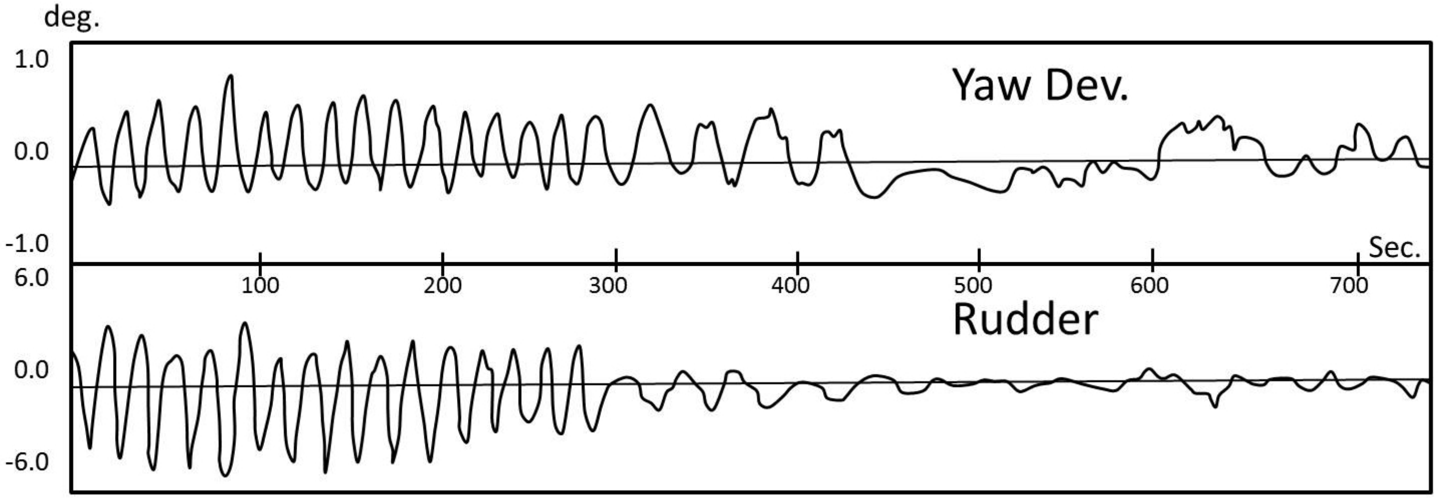
$$A'_j = A_j + C_j - \sum_{i=1}^{j} C_i A_{j-i}, \qquad A_j = O \quad j > m$$

$$B_j = O \quad j > m$$

$$B'_j = B_j + C_j - \sum_{i=1}^{j} C_i B_{j-i} \qquad C_j = O \quad j > k$$



実船試験結果



図表は K. Ohtsu, H. Peng & G. Kitagawa (2015), Time Series modeling for Analysis and Control, Advanced Autopilot and Monitoring Systems, Springer Briefs in Statistics, Springer. P86から転載.