

# 時系列解析（5）

－ARMAモデルによる時系列の解析－

東京大学 数理・情報教育研究センター

北川 源四郎

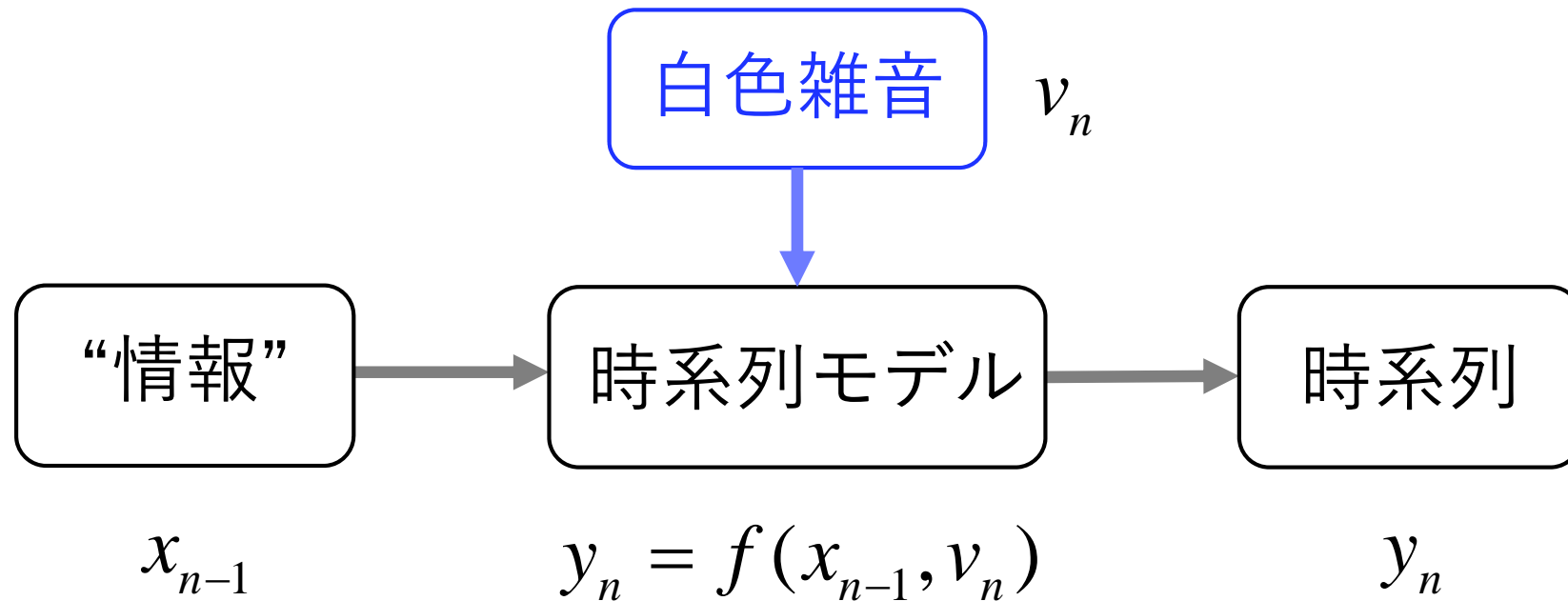
---

# 概要

---

1. 1変量ARMAモデル
  1. インパルス応答関数
  2. 自己共分散関数
  3. 偏自己相関係数
  4. パワースペクトル
  5. 特性方程式
2. 多変量ARモデル
  1. 相互共分散関数
  2. クロススペクトル
  3. パワー寄与率

# 時系列モデル



- 時系列モデルでは白色雑音が重要
- 過去の利用できる情報  $x_{n-1}$  をできるだけ活用して  $y_n$  を表現し，表現しきれない残りが白色雑音と見なせるようにすることを目指す

# 白色雑音 (white noise)

---

相関がない(独立な)時系列

自己共分散関数

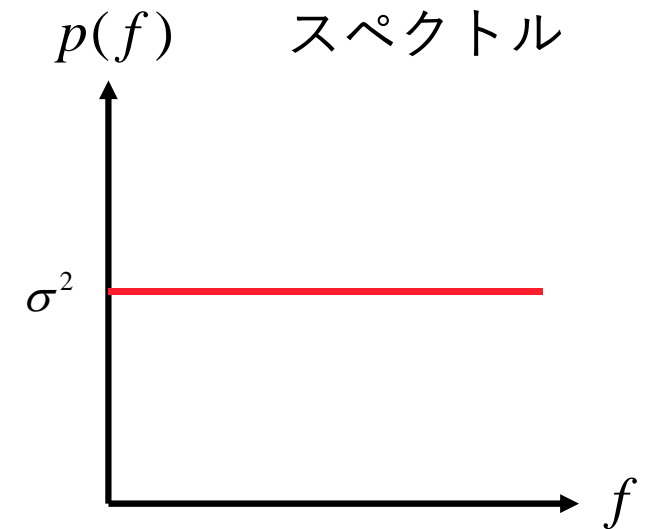
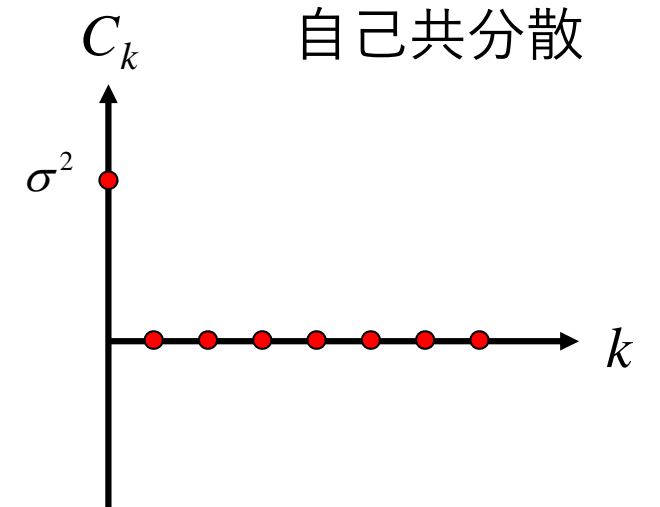
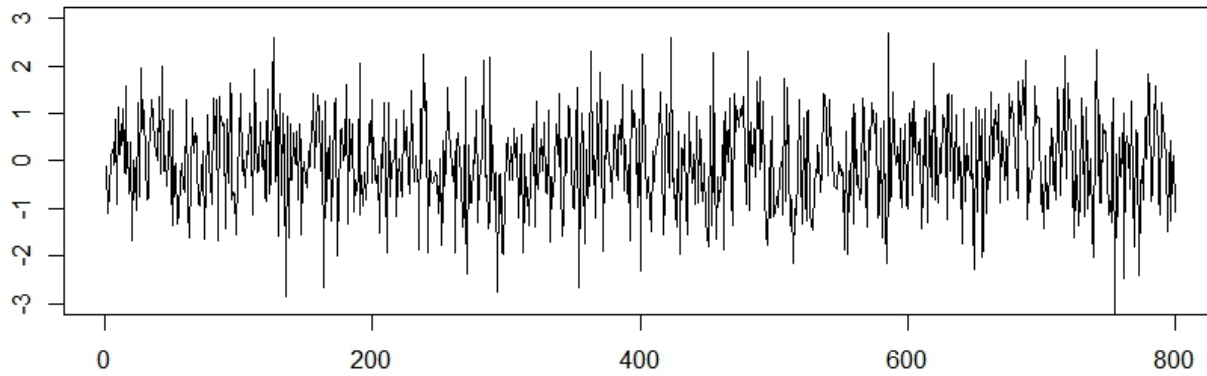
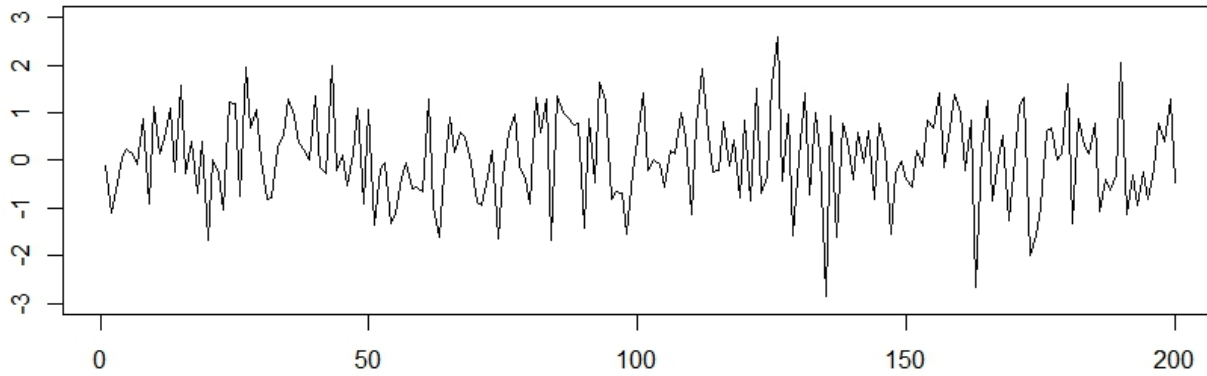
$$C_k = \begin{cases} \sigma^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

パワースペクトル

$$\begin{aligned} p(f) &= C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(2\pi kf) & -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2} \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

# 白色雑音

白色雑音の例



```
w <- as.ts(rnorm(800))  
plot(w,ylim=c(-3,3))  
plot(as.ts(w[1:200]),ylim=c(-3,3))
```

# 自己回帰移動平均 (ARMA)モデル

---

$$y_n = \sum_{j=1}^m a_j y_{n-j} + v_n - \sum_{j=1}^{\ell} b_j v_{n-j}$$

$y_n$	1 変量時系列	$v_n$	白色雑音
$m$	AR次数	$\ell$	MA次数
$a_j$	AR係数	$b_j$	MA係数

$v_n \sim N(0, \sigma^2)$	正規分布
$E[v_n v_k] = 0 \quad n \neq k$	無相関
$E[v_n y_{n-j}] = 0 \quad j > 0$	過去の時系列と無相関

ARMA(AutoRegressive Moving Average)モデル  
あるいはARMA( $m, \ell$ ) と表現する

# ARMA モデルの特殊な場合

---

$$y_n = \sum_{j=1}^m a_j y_{n-j} + v_n - \sum_{j=1}^{\ell} b_j v_{n-j}$$

$$\ell = 0 \quad y_n = \sum_{j=1}^m a_j y_{n-j} + v_n \quad \text{ARモデル}$$

$$m = 0 \quad y_n = v_n - \sum_{j=1}^{\ell} b_j v_{n-j} \quad \text{MAモデル}$$

$$m = \ell = 0 \quad y_n = v_n \quad \text{白色雑音}$$

AR( $m$ ), MA( $\ell$ )と表現する

# さらに特殊な場合

---

$$m = 1, \quad \ell = 0$$

$$y_n = a_1 y_{n-1} + v_n \quad \text{マルコフ過程}$$

注：マルコフ過程とは、1期前の値だけに依存する確率過程

注：AR( $m$ )は $m$ 次元の（ベクトル）マルコフ過程になる

$$m = 1, \quad \ell = 0, \quad a_1 = 1$$

$$y_n = y_{n-1} + v_n \quad \text{ランダムウォーク}$$



# ARIMAモデル

$y_n$  (平均) 非定常時系列

$$\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$$

$$z_n = \Delta^k y_n \quad k \text{ 階差分} \rightarrow \text{ほぼ定常}$$

$$z_n = \sum_{j=1}^m a_j z_{n-j} + v_n - \sum_{j=1}^{\ell} b_j v_{n-j}$$

**Auto**Regressive **I**ntegrated **M**oving **A**verage (ARIMA) model

Box-Jenkins法

時系列  $\rightarrow$  差分による定常化  $\rightarrow$  ARMAモデル

# SARIMAモデル

---

$y_n$  (平均) 非定常時系列

$\Delta_p = 1 - B^p$        $p$ : 1 周期の長さ

$$z_n = \Delta_p y_n = y_n - y_{n-p}$$

$$z_n = \sum_{j=1}^m a_j z_{n-j} + v_n - \sum_{j=1}^{\ell} b_j v_{n-j}$$

**Seasonal ARIMA (SARIMA) model**

# Back-shift operatorによる表現

$$By_n \equiv y_{n-1} \quad B^k y_n = y_{n-k}$$

$B$ : Back-shift operator

$L$ : Lag operatorと呼ぶこともある

$$y_n = \sum_{j=1}^m a_j y_{n-j} + v_n - \sum_{j=1}^{\ell} b_j v_{n-j}$$

$$\left(1 - \sum_{j=1}^m a_j B^j\right) y_n = \left(1 - \sum_{j=1}^{\ell} b_j B^j\right) v_n$$

$$a(B) = 1 - \sum_{j=1}^m a_j B^j \quad \text{ARオペレーター}$$

$$b(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\ell} b_j B^j \quad \text{MAオペレーター}$$

$$a(B)y_n = b(B)v_n$$

# インパルス応答関数

---

$$a(B)y_n = b(B)v_n$$

$$y_n = a(B)^{-1}b(B)v_n$$

$$g(B) \equiv a(B)^{-1}b(B) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j B^j, \quad g_1 = 0$$

$$y_n = g(B)v_n = \sum_{j=0}^{\infty} g_j v_{n-j}$$

インパルス応答関数

$$\{g_j : j = 0, 1, \dots\}$$

# インパルス応答関数

---

$$\{g_j : j = 0, 1, \dots\}$$

- 時刻  $n=0$  に加わったノイズが  $j$  期後に時系列に及ぼす影響
- ARMAモデルは無限次のMAモデルで表現できる

$$y_n = g(B)v_n = \sum_{j=0}^{\infty} g_j y_{n-j}$$

$$g(B) = a(B)^{-1}b(B)$$

# インパルス応答関数 (例)

---

$$y_n = ay_{n-1} + v_n$$

$$g(B) = (1 - aB)^{-1} = 1 + aB + a^2B^2 + \dots$$

$$g_j = a^j$$

インパルス応答関数の計算法

$$g_0 = 1$$

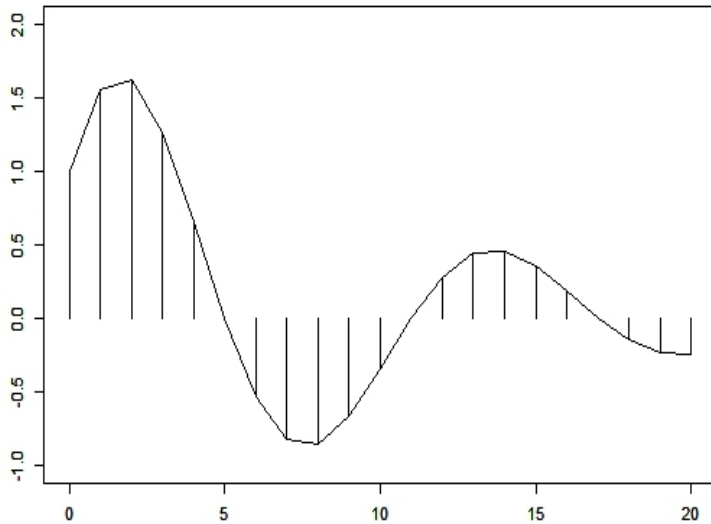
$$g_i = \sum_{j=1}^i a_j g_{i-j} - b_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

# インパルス応答関数

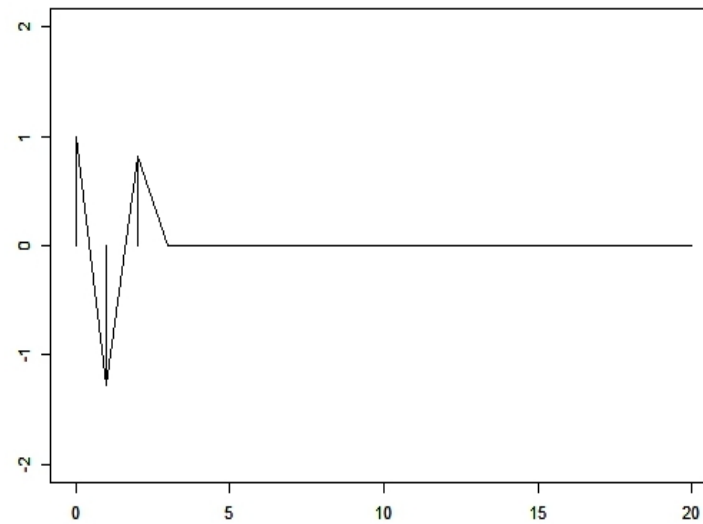
$$(1) \quad y_n = 0.9\sqrt{3}y_{n-1} - 0.81y_{n-2} + v_n$$

$$(2) \quad y_n = v_n - 0.9\sqrt{2}v_{n-1} + 0.81v_{n-2}$$

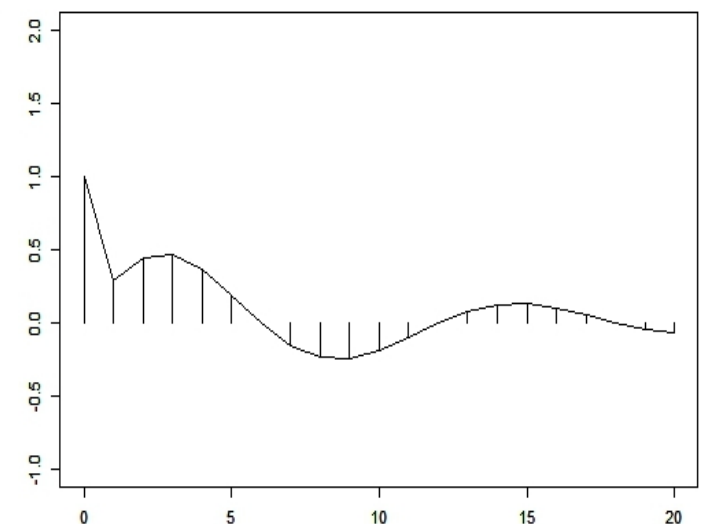
$$(3) \quad y_n = 0.9\sqrt{3}y_{n-1} - 0.81y_{n-2} + v_n - 0.9\sqrt{2}v_{n-1} + 0.81v_{n-2}$$



AR(2)



MA(2)



ARMA(2,2)

# 自己共分散関数

$$y_n = \sum_{j=1}^m a_j y_{n-j} + v_n - \sum_{j=1}^{\ell} b_j v_{n-j}$$

$$y_n = \sum_{j=1}^{\infty} g_j v_{n-j}$$

$y_{n-k}$  と  $v_n$  をかけ期待値  
をとる

$$E(y_n y_{n-k}) = \sum_{j=1}^m a_j E(y_{n-j} y_{n-k}) + E(v_n y_{n-k}) - \sum_{j=1}^{\ell} b_j E(v_{n-j} y_{n-k})$$

$$E(v_n y_k) = E(v_n \sum_{j=1}^{\infty} g_j v_{k-j}) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j E(v_n v_{k-j}) = \begin{cases} 0 & n > k \\ \sigma^2 g_{k-n} & n \leq k \end{cases}$$

$$C_0 = \sum_{j=1}^m a_j C_j + \sigma^2 \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{\ell} b_j g_j \right\}$$

$$C_k = \sum_{j=1}^m a_j C_{k-j} - \sigma^2 \sum_{j=1}^{\ell} b_j g_{j-k}$$

$$m, \ell, a_j, b_j, \sigma^2 \Rightarrow g_1, \dots, g_{\ell} \Rightarrow C_0, C_1, \dots$$

Yule-Walker方程式  
(ARモデルの場合)

$$C_0 = \sum_{j=1}^m a_j C_j + \sigma^2$$

$$C_k = \sum_{j=1}^m a_j C_{k-j}$$

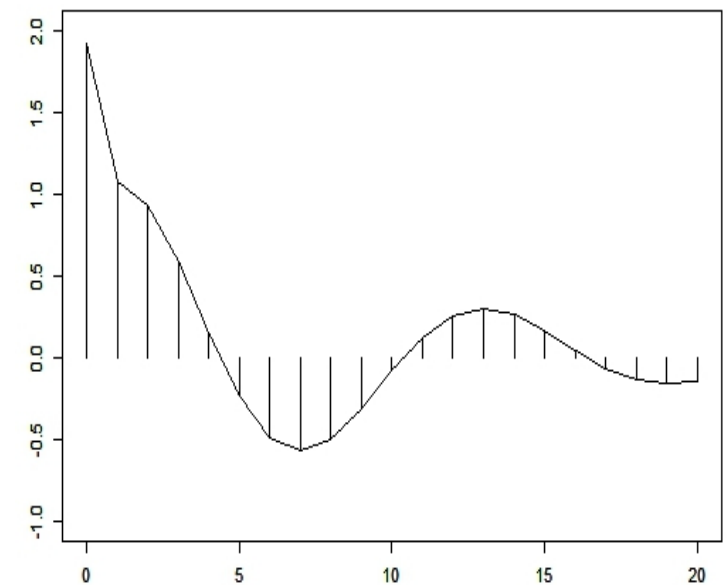
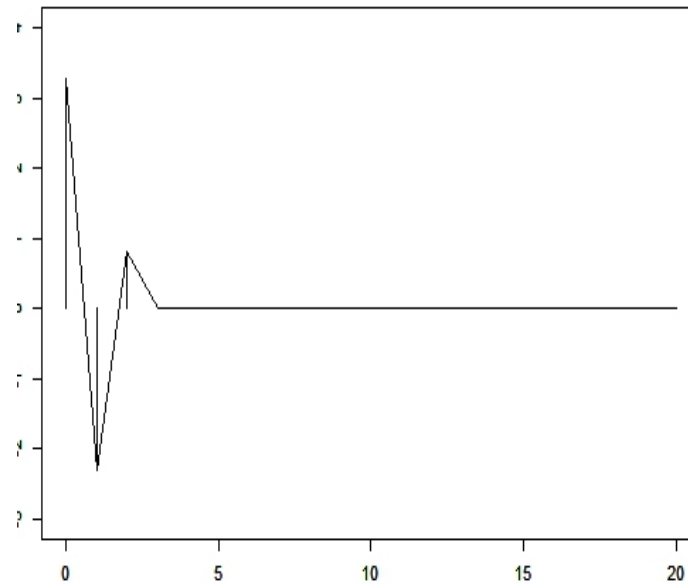
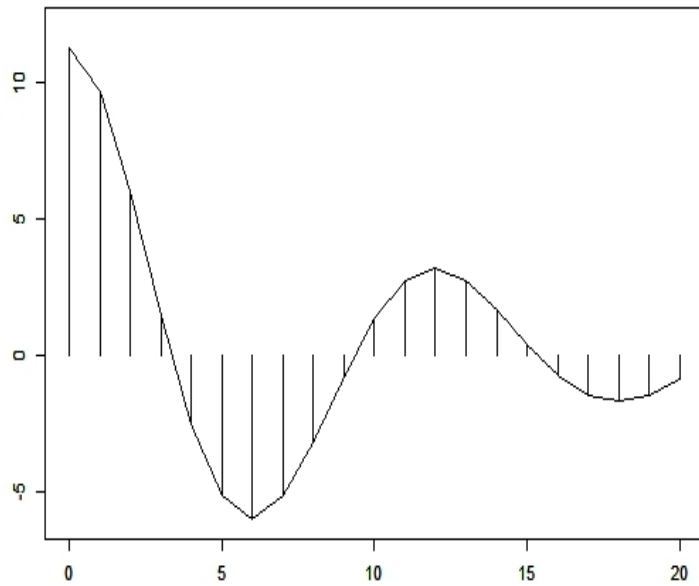


# 自己共分散関数

$$(1) \quad y_n = 0.9\sqrt{3}y_{n-1} - 0.81y_{n-2} + v_n$$

$$(2) \quad y_n = v_n - 0.9\sqrt{2}v_{n-1} + 0.81v_{n-2}$$

$$(3) \quad y_n = 0.9\sqrt{3}y_{n-1} - 0.81y_{n-2} + v_n - 0.9\sqrt{2}v_{n-1} + 0.81v_{n-2}$$



- MA( $\ell$ )では  $C_k=0$  ( $k > \ell$  のとき)

# 偏自己相関係数 (PARCOR)

---

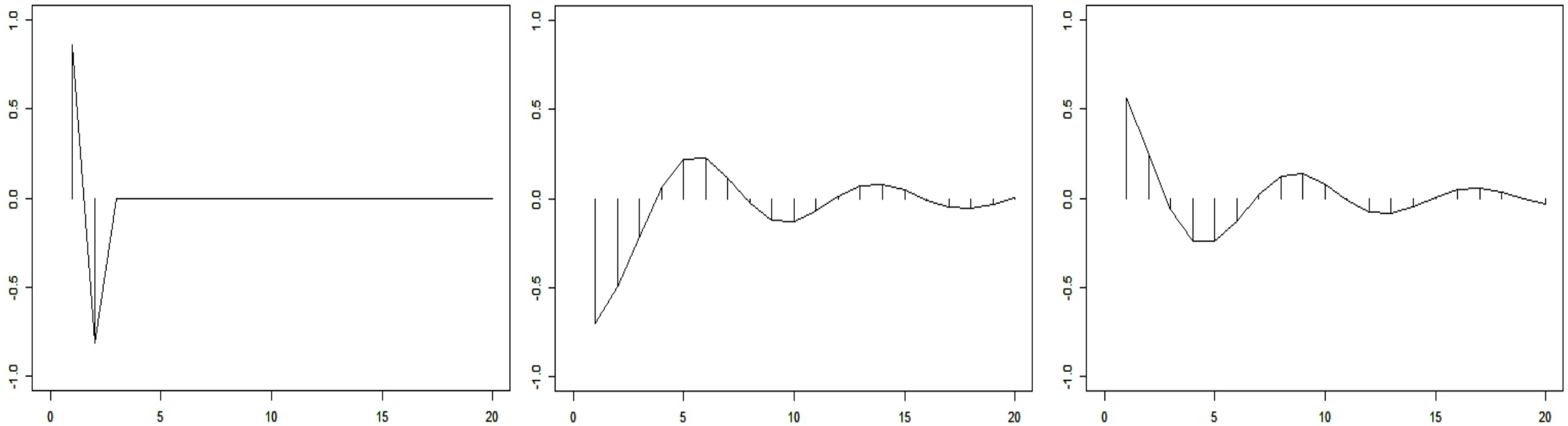
$$y_n = \sum_{j=1}^m a_j^m y_{n-j} + v_n$$

$a_j^m$  次数  $m$  のARモデルの  $j$  番目の係数

$b_m \equiv a_m^m$  偏自己相関係数 (PARCOR, Partial Autocorrelation)

- 直交化されているので便利
- 音声分析、音声合成でも重要

# 偏自己相関係数 (PARCOR)



- AR( $m$ )では  $b_k=0$  ( $k>m$  のとき)

# AR, MA, ARMAモデルの特徴

---

非零な自己相関, 偏自己相関の長さ

	$R_k$	$b_k$
AR( $m$ )	$\infty$	$m$
MA( $l$ )	$l$	$\infty$
ARMA( $m, l$ )	$\infty$	$\infty$

# AR係数とPARCORの関係

$$\{a_1^{m-1}, \dots, a_{m-1}^{m-1}\} \text{ と } a_m^m \Rightarrow \{a_1^m, \dots, a_m^m\}$$

$$a_i^m = a_i^{m-1} - a_m^m a_{m-i}^{m-1} \quad (i = 1, \dots, m-1)$$

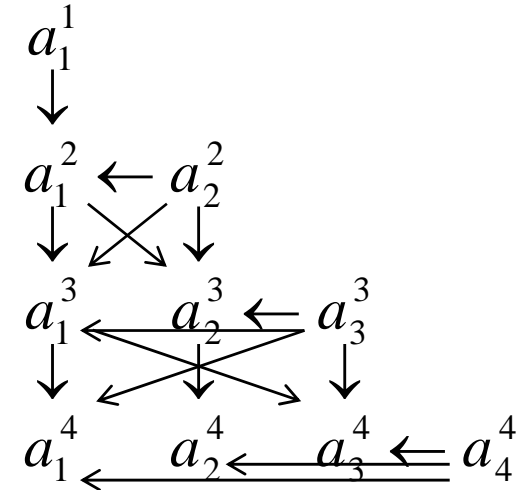
$$\{a_1^m, \dots, a_m^m\} \Rightarrow \{a_1^{m-1}, \dots, a_{m-1}^{m-1}\}$$

$$\begin{aligned} a_i^m &= a_i^{m-1} - a_m^m a_{m-i}^{m-1} \\ &= a_i^{m-1} - a_m^m (a_{m-i}^m + a_m^m a_i^{m-1}) \end{aligned}$$

$$(1 - (a_m^m)^2) a_i^{m-1} = a_i^m + a_m^m a_{m-i}^{m-1}$$

$$a_i^{m-1} = \frac{a_i^m + a_m^m a_{m-i}^{m-1}}{1 - (a_m^m)^2}$$

$$\{b_1, \dots, b_m\} \Leftrightarrow \{a_1^m, \dots, a_m^m\}$$



# パワースペクトル

$$y_n = \sum_{j=1}^m a_j y_{n-j} + v_n - \sum_{j=1}^{\ell} b_j v_{n-j}$$

$$\begin{aligned} p(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-2\pi i k f} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(y_n y_{n-k}) e^{-2\pi i k f} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\left(\sum_{j=0}^{\infty} g_j v_{n-j} \sum_{p=0}^{\infty} g_p v_{n-k-p}\right) e^{-2\pi i k f} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} g_j g_p E[v_{n-j} v_{n-k-p}] e^{-2\pi i k f} \end{aligned}$$

$$y_n = g(B)v_n = \sum_{j=1}^{\infty} g_j v_{n-j}$$

$$E[v_{n-j} v_{n-k-p}] = \begin{cases} \sigma^2 & j = k + p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

# パワースペクトル

$$\begin{aligned}
 p(f) &= \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g_j g_{j-k} e^{-2\pi i k f} \\
 &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^j g_j e^{-2\pi i j f} g_{j-k} e^{-2\pi i (k-j) f} \\
 &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} g_j e^{-2\pi i j f} g_p e^{2\pi i p f} \\
 &= \sigma^2 \left| \sum_{j=0}^{\infty} g_j e^{-2\pi i j f} \right|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{-2\pi i k f} &= e^{-2\pi i (j+k-j) f} \\
 &= e^{-2\pi i j f} e^{-2\pi i (k-j) f} \\
 j-k &= p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(B) &= a(B)^{-1} b(B) \\
 g(e^{-2\pi i k f}) &= a(e^{-2\pi i j f})^{-1} b(e^{-2\pi i j f})
 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} g_j e^{2\pi i j f} = \left\{ 1 - \sum_{j=1}^m a_j e^{-2\pi i j f} \right\}^{-1} \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{\ell} b_j e^{-2\pi i j f} \right\}$$

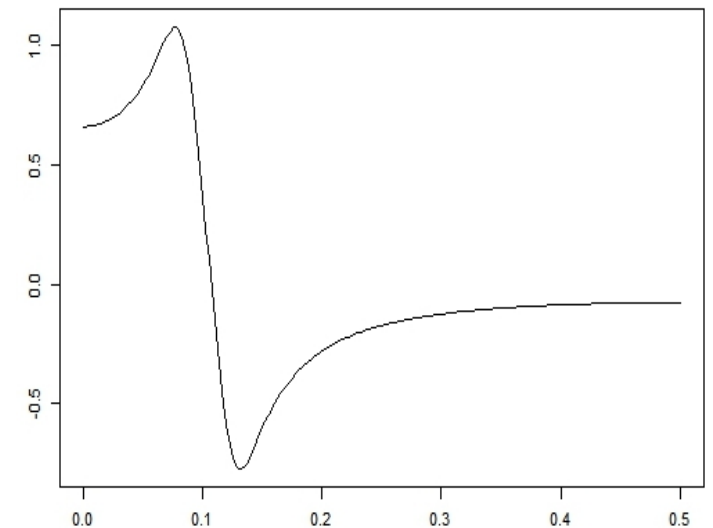
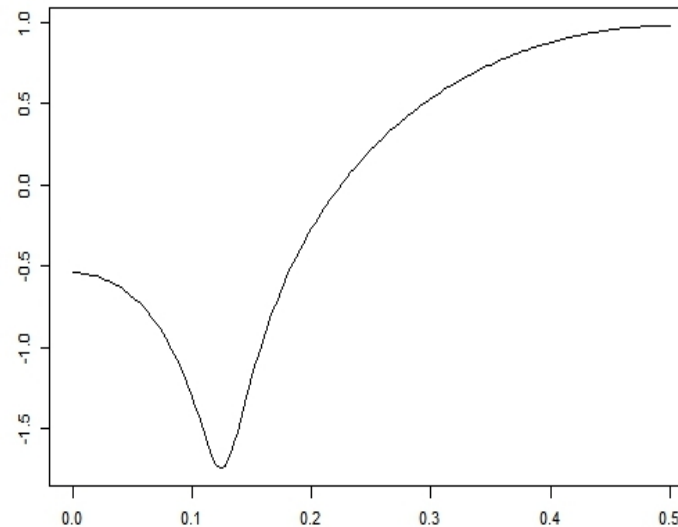
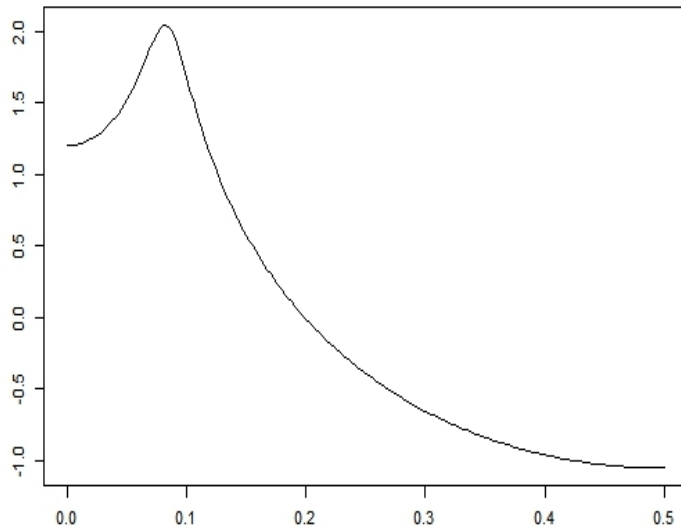
$$p(f) = \sigma^2 \frac{\left| 1 - \sum_{j=1}^{\ell} b_j e^{-2\pi i j f} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^m a_j e^{-2\pi i j f} \right|^2}$$

# パワースペクトル

$$(1) \quad y_n = 0.9\sqrt{3}y_{n-1} - 0.81y_{n-2} + v_n$$

$$(2) \quad y_n = v_n - 0.9\sqrt{2}v_{n-1} + 0.81v_{n-2}$$

$$(3) \quad y_n = 0.9\sqrt{3}y_{n-1} - 0.81y_{n-2} + v_n - 0.9\sqrt{2}v_{n-1} + 0.81v_{n-2}$$



AR: 山を表現するモデル

MA: 谷を表現するモデル

ARMA: 山と谷を表現するモデル



# AR・MA次数とパワースペクトルの山谷の関係

$$y_n = \sum_{j=1}^m a_j y_{n-j} + v_n - \sum_{j=1}^{\ell} b_j v_{n-j} \quad p(f) = \sigma^2 \frac{\left| 1 - \sum_{j=1}^{\ell} b_j e^{-2\pi i j f} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^m a_j e^{-2\pi i j f} \right|^2}$$

$$\log p(f) = \log \sigma^2 - 2 \log \left| 1 - \sum_{j=1}^m a_j e^{-2\pi i j f} \right|^2 + 2 \log \left| 1 - \sum_{j=1}^{\ell} b_j e^{-2\pi i j f} \right|^2$$

スペクトルの山  $\Leftrightarrow \left| 1 - \sum_{j=1}^m a_j e^{-2\pi i j f} \right|^2$  の極小点

スペクトルの谷  $\Leftrightarrow \left| 1 - \sum_{j=1}^{\ell} b_j e^{-2\pi i j f} \right|^2$  の極小点

・ 一組の複素数に 2 次が必要

$k$  個の山  $\Rightarrow$  AR 次数  $\geq 2k$

$k$  個の谷  $\Rightarrow$  MA 次数  $\geq 2k$

・ 実根：  $f = 0$  または  $\frac{1}{2}$  の山か谷

# 特性方程式

---

$$y_n = \sum_{j=1}^m a_j y_{n-j} + v_n - \sum_{j=1}^{\ell} b_j v_{n-j}$$

$$a(B) = 1 - \sum_{j=1}^m a_j B^j = 0 \quad \text{ARオペレータの特性方程式}$$

$$b(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\ell} b_j B^j = 0 \quad \text{MAオペレータの特性方程式}$$

$$a(B)=0 \text{の根がすべて単位円外} \quad \text{定常} \quad g_j \rightarrow 0$$

$$b(B)=0 \text{の根がすべて単位円外} \quad \text{反転可能}$$

$$b_j \rightarrow 0 \quad b(B)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i B^i$$

$$y_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_i y_{n-i} + v_n$$

# 特性方程式

$\lambda=B^{-1}$ に関する方程式の方が便利

$$\lambda^m - \sum_{j=1}^m a_j \lambda^{m-j} = 0$$

本講義ではこちらを特性方程式とよぶ

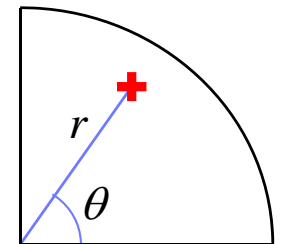
$$\lambda^m - \sum_{j=1}^m a_j \lambda^{m-j} = 0 \quad \text{の根がすべて単位円内}$$

定常

$$\lambda^m - \sum_{j=1}^{\ell} b_j \lambda^{\ell-j} = 0 \quad \text{の根がすべて単位円内}$$

反転可能

$$\lambda = \alpha + i\beta = r e^{i\theta} \Rightarrow f = \frac{\theta}{2\pi}$$



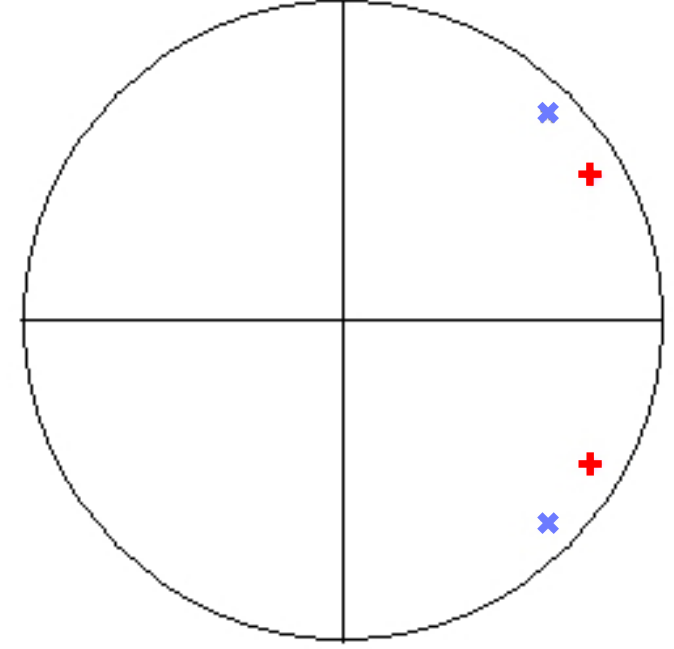
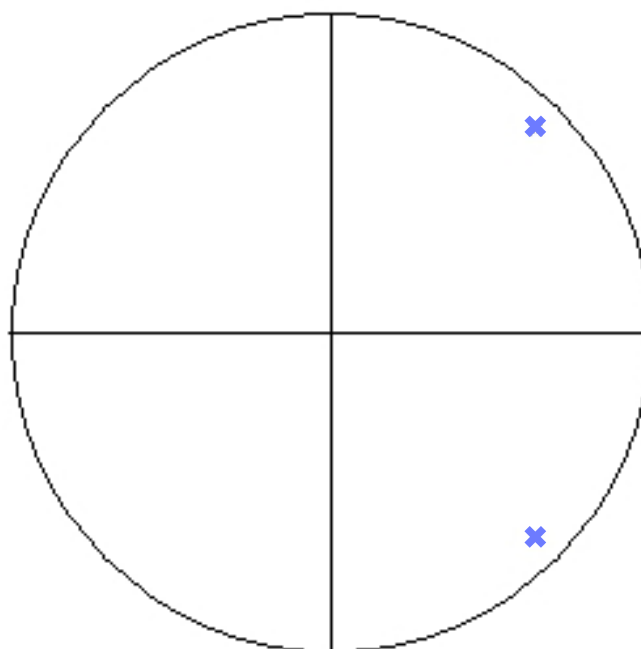
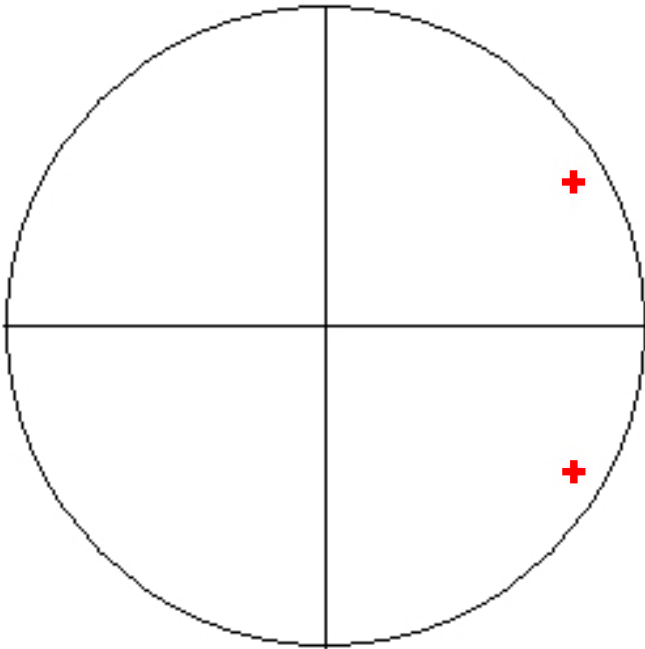
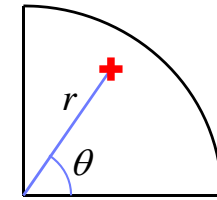
# 特性方程式

$$\lambda = \alpha + i\beta = re^{i\theta} \Rightarrow f = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$(1) \quad y_n = 0.9\sqrt{3}y_{n-1} - 0.81y_{n-2} + v_n$$

$$(2) \quad y_n = v_n - 0.9\sqrt{2}v_{n-1} + 0.81v_{n-2}$$

$$(3) \quad y_n = 0.9\sqrt{3}y_{n-1} - 0.81y_{n-2} + v_n - 0.9\sqrt{2}v_{n-1} + 0.81v_{n-2}$$



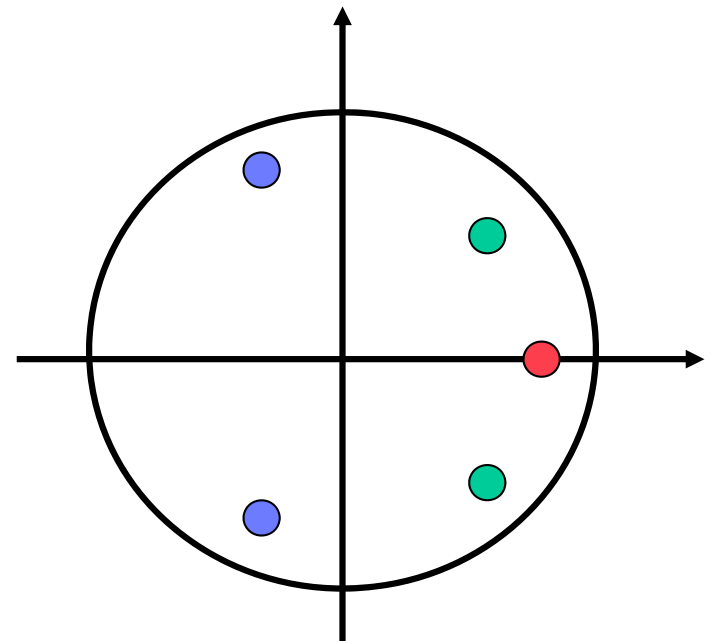
# 定常性の条件

$$y_n = a_1 y_{n-1} + \cdots + a_m y_{n-m} + \varepsilon_n$$

特性方程式

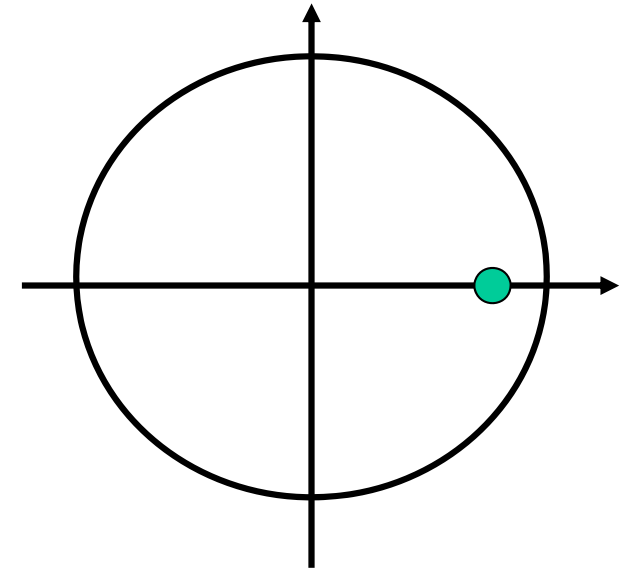
$$\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - \cdots - a_m = 0$$

$a(B)$ に関する特性方程式  
の根がすべて単位円内



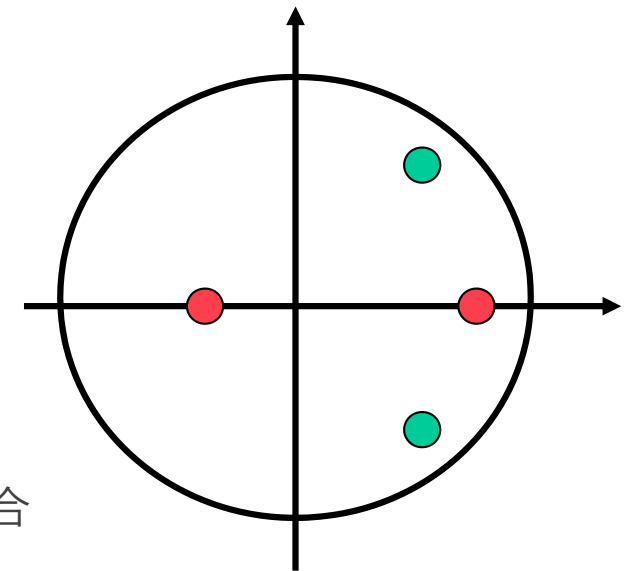
# 定常性の条件： 例

$$\begin{aligned} m = 1 \quad \lambda - a_1 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= a_1 \\ \Rightarrow |a_1| &< 1 \end{aligned}$$



$$m = 2$$

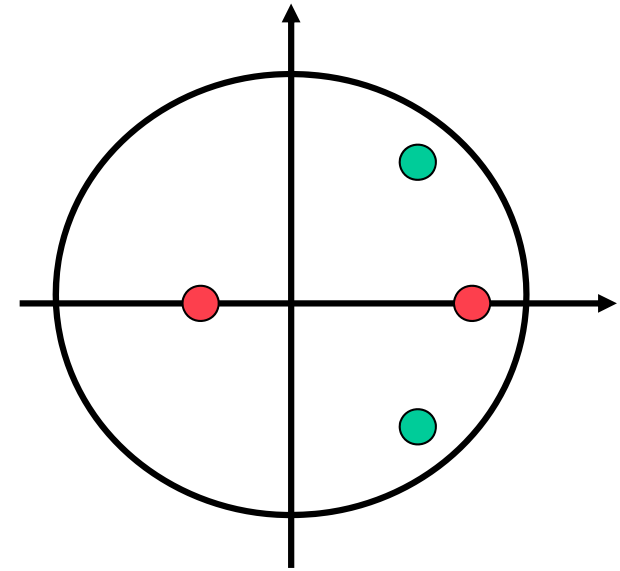
$$\begin{aligned} \lambda^2 - a_1\lambda - a_2 &= 0 \\ \lambda &= \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} \end{aligned}$$



- 共役複素数の場合
- 実数 2 個の場合

# 定常性の条件：例

$$m = 2 \quad \lambda = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2}$$



- $a_1^2 + 4a_2 \geq 0$  のとき

$$-2 < a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2} < 2$$

$$a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2} < 2 \Rightarrow \sqrt{a_1^2 + 4a_2} < 2 - a_1 \Rightarrow a_2 < 1 - a_1$$

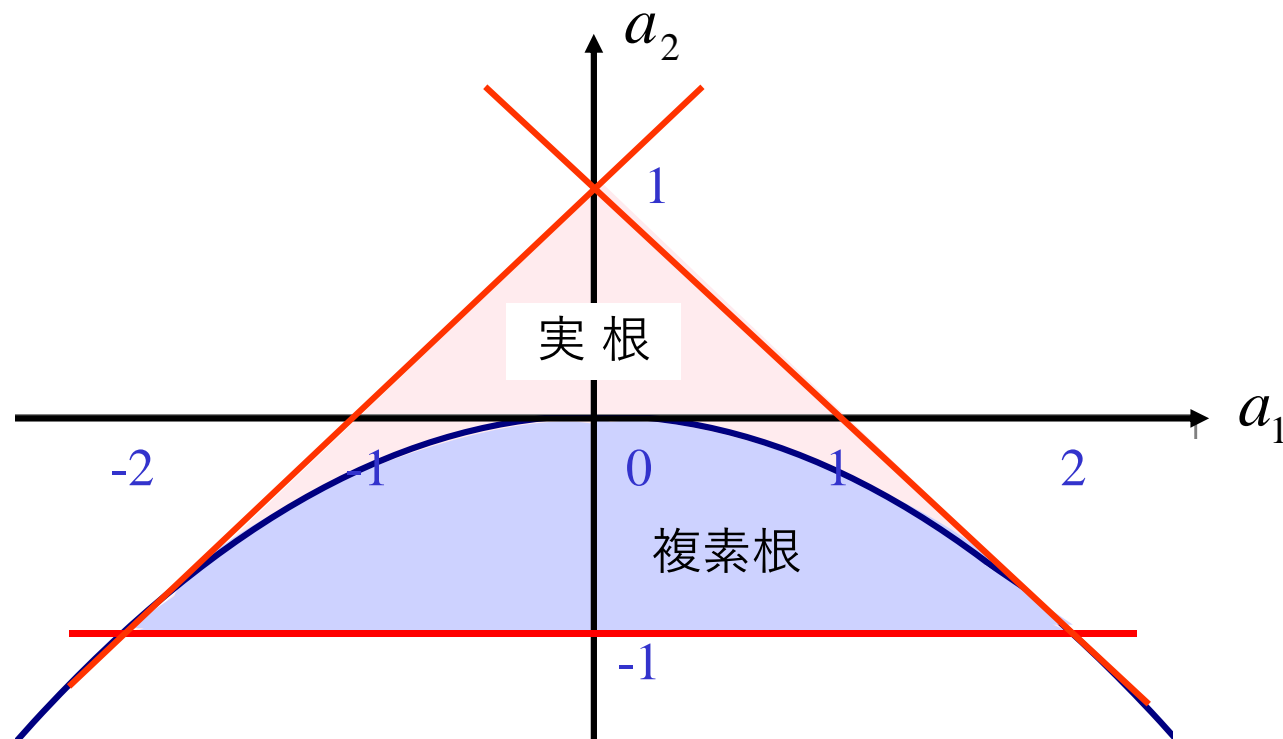
$$a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2} > -2 \Rightarrow \sqrt{a_1^2 + 4a_2} > a_1 + 2 \Rightarrow a_2 < 1 + a_1$$

- $a_1^2 + 4a_2 < 0$  のとき

$$|\lambda| < 1 \Rightarrow a_1^2 - (a_1^2 + 4a_2) < 4 \Rightarrow a_2 > -1$$

# 定常性の条件：例 $m = 2$

- $a_1^2 + 4a_2 \geq 0$  のとき  $a_2 < 1 - a_1$   
 $a_2 < 1 + a_1$
- $a_1^2 + 4a_2 < 0$  のとき  $a_2 > -1$



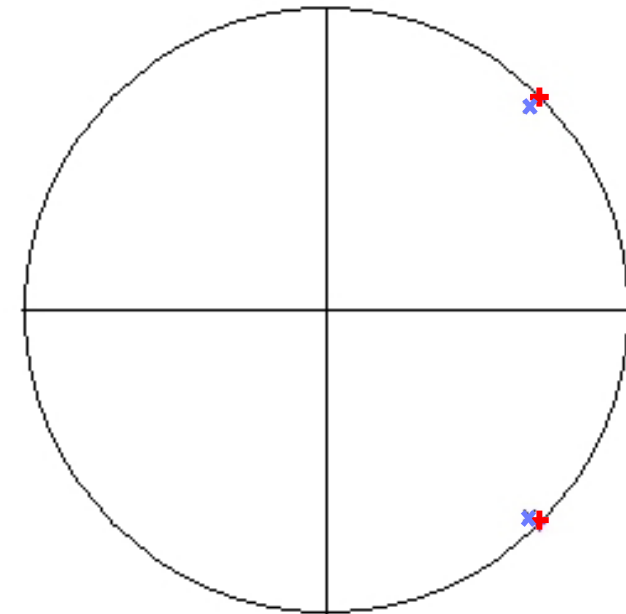
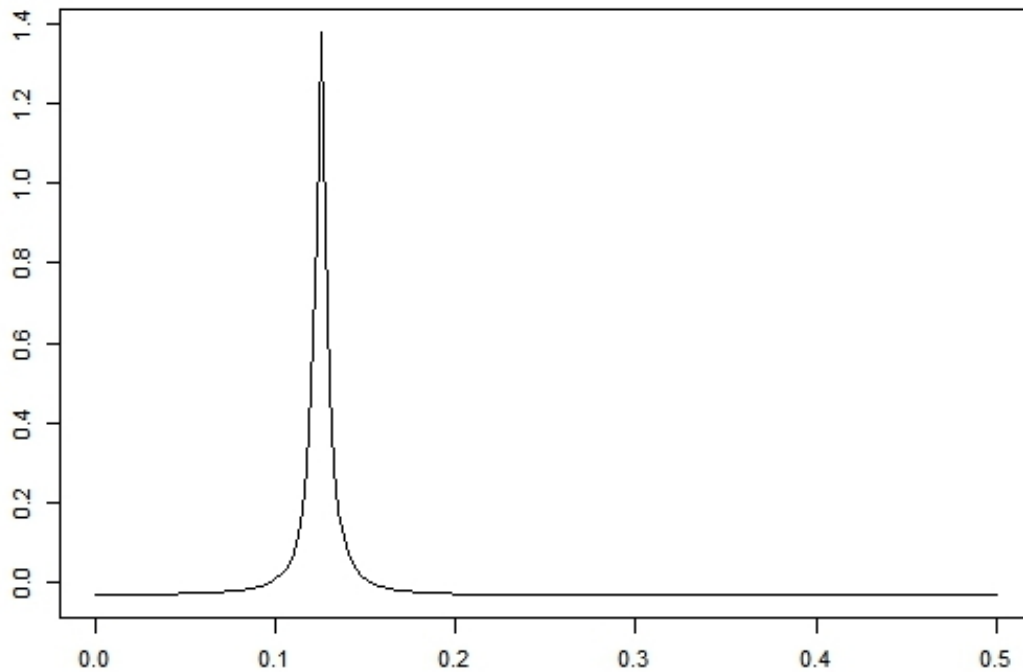


# ライン状のスペクトル

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + v_n - b_1 v_{n-1} - b_2 v_{n-2}$$

$$a_1 = 0.99\sqrt{2} \quad a_2 = -0.99^2$$

$$b_1 = 0.95\sqrt{2} \quad b_2 = -0.95^2$$

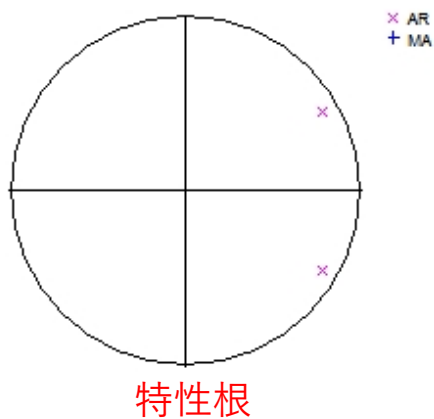
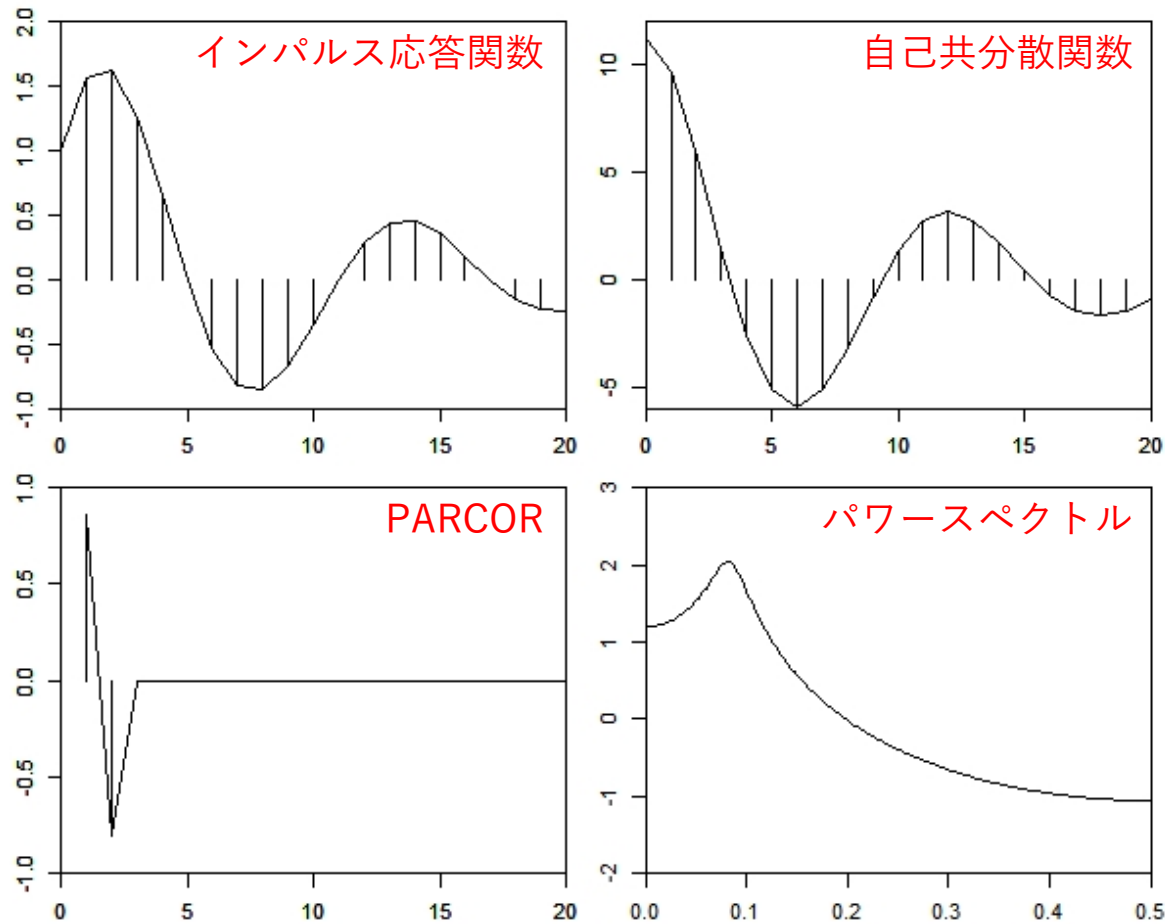


$a(B)=0, b(B)=0$  の根の  $\theta$  が同じ場合

$$r = 0.99, \quad \theta = 45^\circ$$

$$r = 0.95, \quad \theta = 45^\circ$$

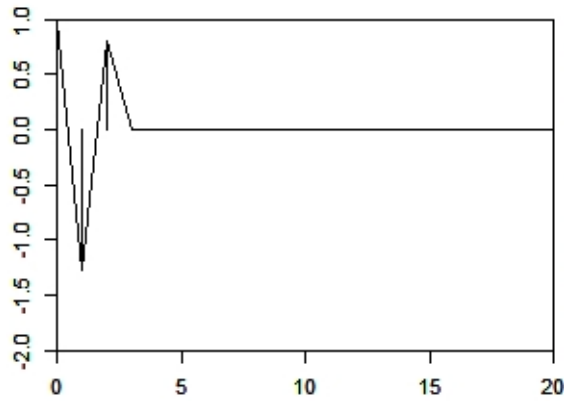
# Rによる計算：AR(2)モデル



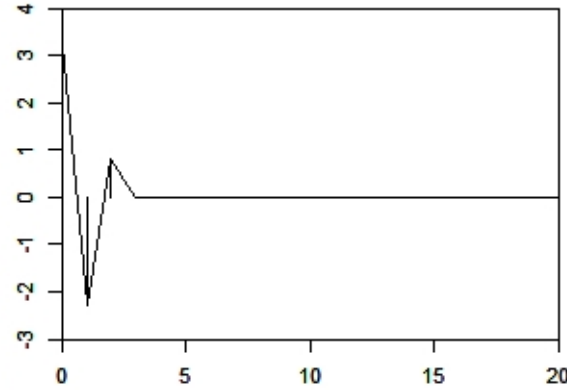
```
# AR model :  $y(n) = 0.9\sqrt{3}y(n-1) - 0.81y(n-2) + v(n)$   
z <- armaimp(arcoef=a, v=1.0, n=1000, lag=20)  
z$croot.ar
```

# Rによる計算：MA(2)モデル

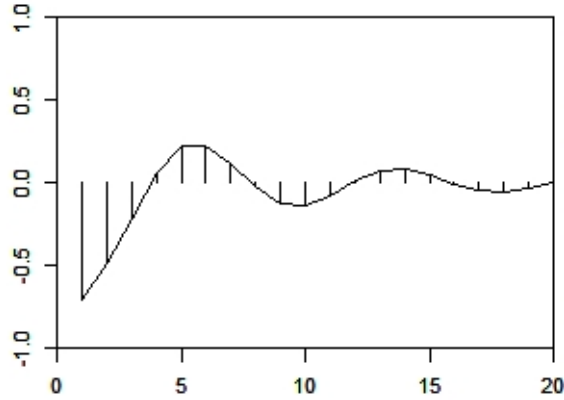
インパルス応答関数



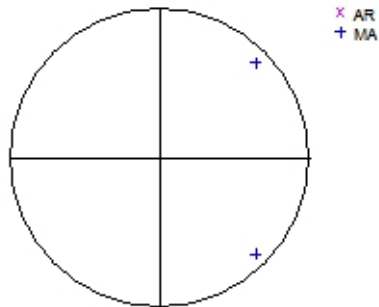
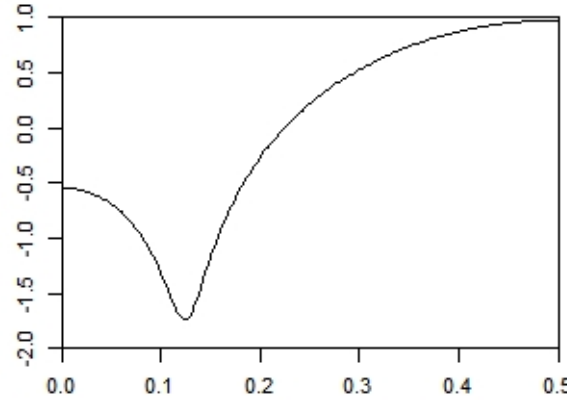
自己共分散関数



PARCOR



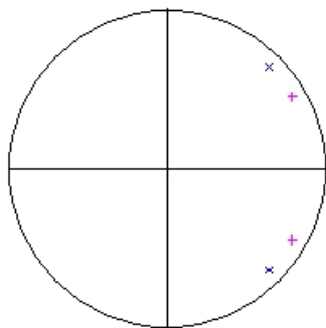
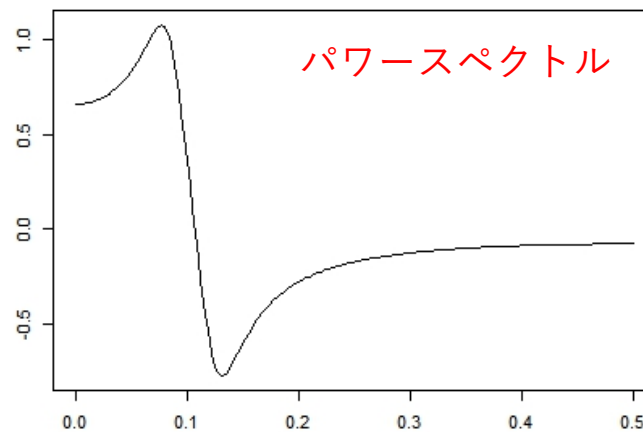
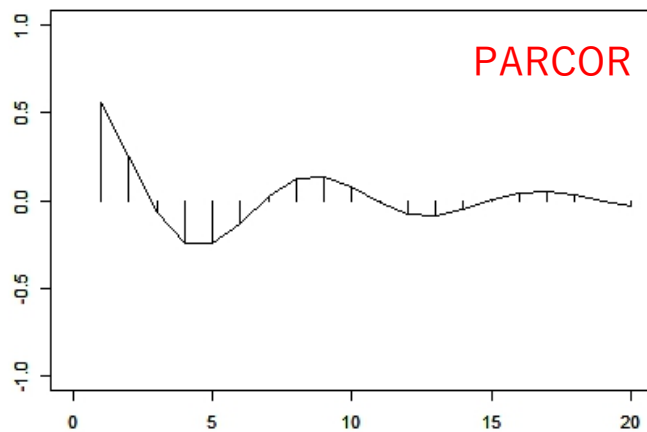
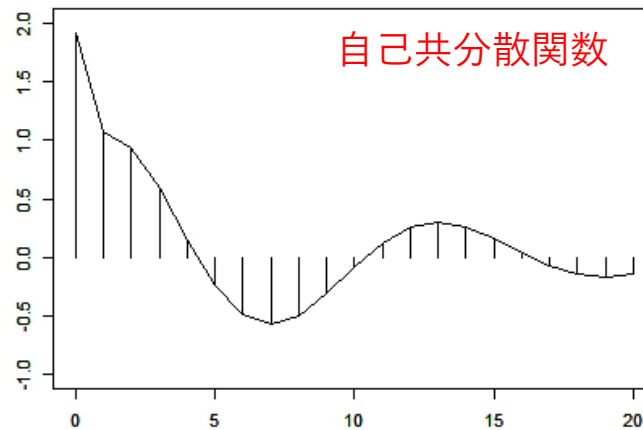
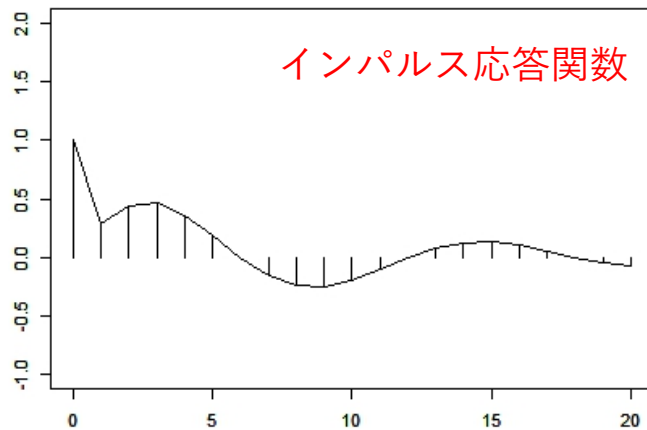
パワースペクトル



特性根

```
# MA model :  $y(n) = v(n) - 0.9\sqrt{2}v(n-1) + 0.81v(n-2)$   
z <- armaimp(macoef=b, v=1.0, n=1000, lag=20)  
z$croot.ma
```

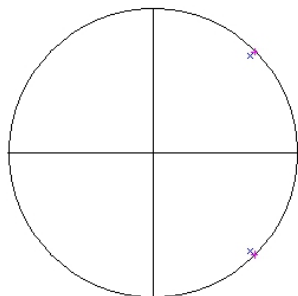
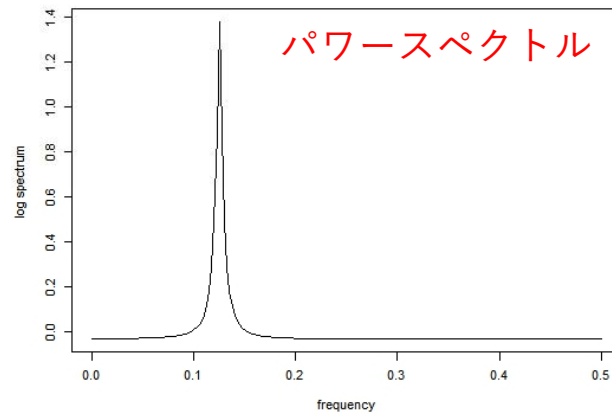
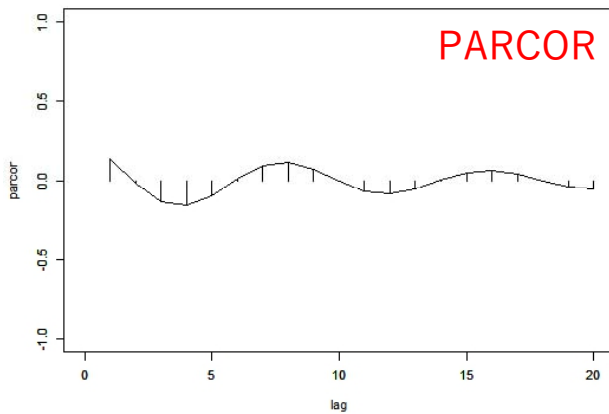
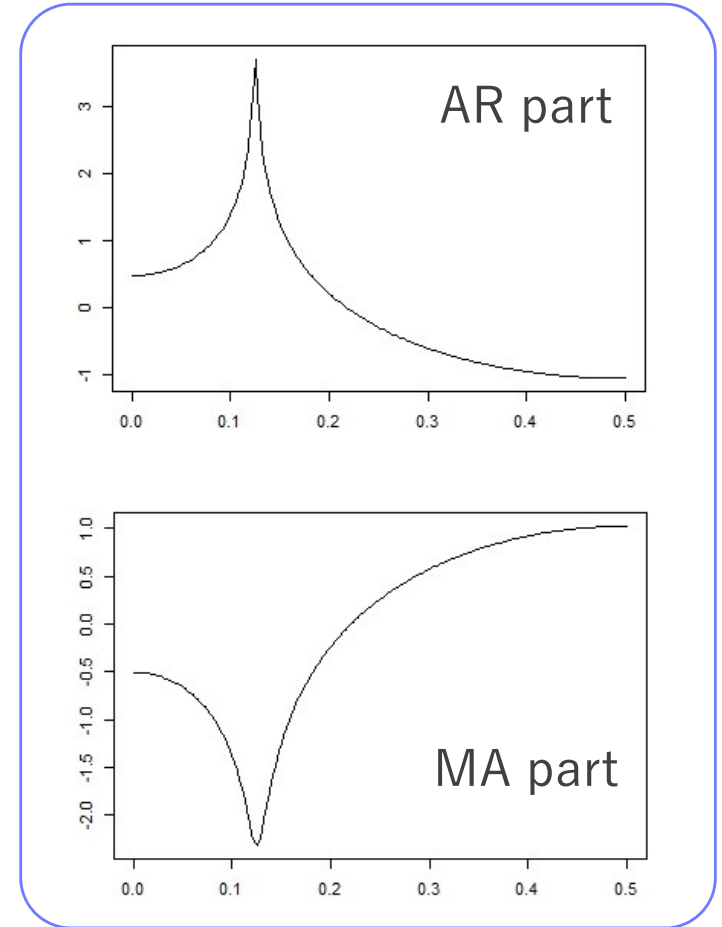
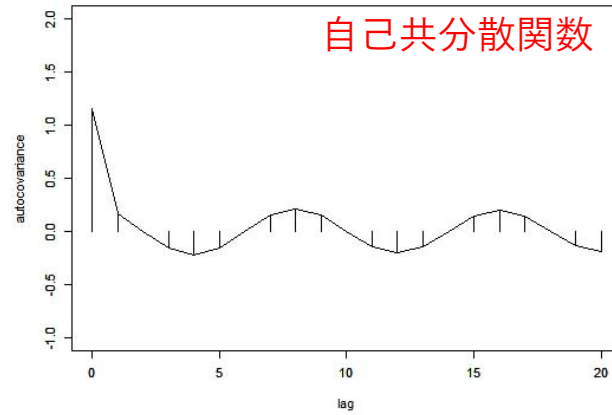
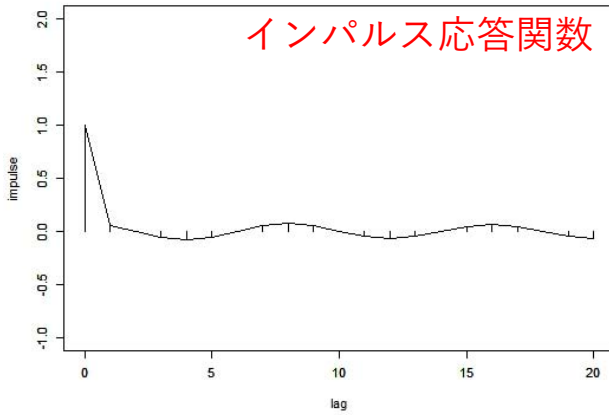
# Rによる計算：ARMA(2,2)モデル



特性根

```
# ARMA model :  $y(n) = 0.9\sqrt{3}y(n-1) - 0.81y(n-2)$   
#                $+ v(n) - 0.9\sqrt{2}v(n-1) + 0.81v(n-2)$   
a <- c(0.9*sqrt(3), -0.81)  
b <- c(0.9*sqrt(2), -0.81)  
z <- armaimp(arcoef=a, macoef=b, v=1.0, n=1000, lag=20)  
z$croot.ar  
z$croot.ma
```

# ARMA(2,2)モデル



特性根

ARMA characteristic roots  
(AR: pink, MA: blue)

```
# ARMA model :  $y(n) = 0.99\sqrt{2}y(n-1) - 0.99^2y(n-2)$ 
#                 $+ v(n) - 0.95\sqrt{2}v(n-1) + 0.95^2v(n-2)$ 
a <- c(0.99*sqrt(2), -0.9801)
b <- c(0.95*sqrt(2), -0.9025)
z <- armaimp(arcoef=a, macoef=b, v=1.0, n=1000, lag=20)
z$croot.ar
z$croot.ma
```

# 多変量自己回帰モデル (MAR, VAR Model)

$$y_n = (y_n(1), \dots, y_n(\ell))^T \quad \ell \text{ 変量時系列}$$
$$y_n = \sum_{j=1}^m A_j y_{n-j} + v_n$$
$$A_j = \begin{bmatrix} a_j(1,1) & \cdots & a_j(1,\ell) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_j(\ell,1) & \cdots & a_j(\ell,\ell) \end{bmatrix}$$

$v_n$  :  $\ell$  変量正規白色雑音

$$E[v_n] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E[v_n v_n^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\ell 1} & \cdots & \sigma_{\ell\ell} \end{bmatrix} = W \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$E[v_n v_m^T] = O \quad n \neq m \quad v_n \text{ は自分自身と独立 (白色)}$$

$$E[v_n y_m^T] = O \quad n > m \quad v_n \text{ は } y_n \text{ の過去と独立}$$

- 多変量ARMAモデルも同様に定義できる

# 相互共分散関数

$$C_k(i, j) = E[y_n(i) y_{n-k}(j)]$$

$$C_k = E[y_n y_{n-k}^T]$$

$$C_k = \begin{bmatrix} C_k(1,1) & \cdots & C_k(1,\ell) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_k(\ell,1) & \cdots & C_k(\ell,\ell) \end{bmatrix}$$

多変量ARモデル

$$y_n = \sum_{j=1}^m A_j y_{n-j} + v_n$$

$$A_k = \begin{bmatrix} a_k(1,1) & \cdots & a_k(1,\ell) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k(\ell,1) & \cdots & a_k(\ell,\ell) \end{bmatrix}$$

Yule-Walker方程式

$$C_0 = \sum_{j=1}^m A_j C_{-j} + W$$

$$C_k = \sum_{j=1}^m A_j C_{k-j} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

# クロススペクトル

$$\begin{aligned} p_{sj}(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(s, j) e^{-2\pi i k f} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(s, j) \cos 2\pi i k f - i \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(s, j) \sin 2\pi i k f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-2\pi i k f} \\ C_k &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P(f) e^{2\pi i k f} df \end{aligned}$$

$$P(f) = \begin{bmatrix} p_{11}(f) & \dots & p_{1m}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}(f) & \dots & p_{mm}(f) \end{bmatrix}$$

$y_n$  が多変量ARモデルに従うとき

$$y_n = \sum_{j=1}^m A_j y_{n-j} + v_n, \quad v_n \sim N(0, W)$$

$$A(f) = \begin{bmatrix} A_{11}(f) & \dots & A_{1m}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}(f) & \dots & A_{mm}(f) \end{bmatrix}$$

$$P(f) = A(f)^{-1} W (A(f)^{-1})^*$$

$$\begin{aligned} A_{jk}(f) &= \sum_{j=0}^m a_j(j, k) e^{-2\pi i j f} \\ a_0 &= -I \end{aligned}$$



# クロススペクトル

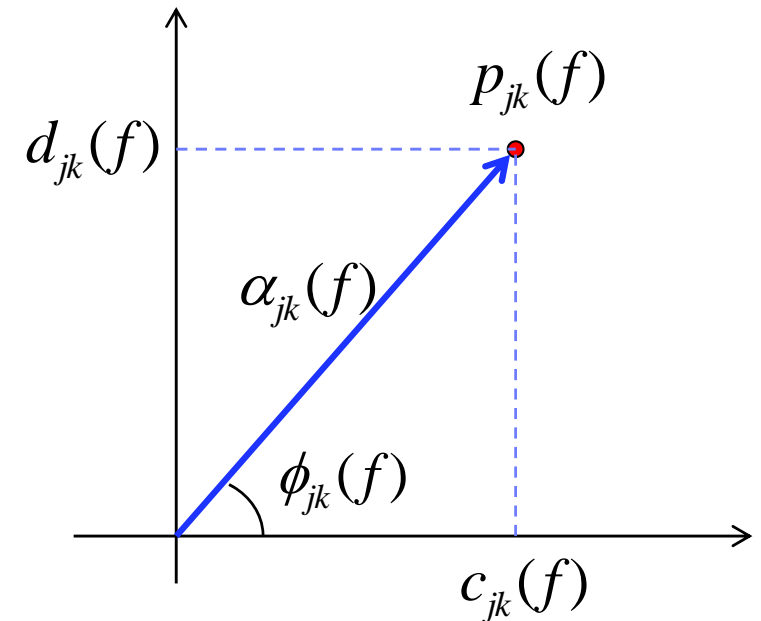
$$p_{jk}(f) = c_{jk}(f) + id_{jk}(f)$$

$$\alpha_{jk}(f) = \sqrt{c_{jk}(f)^2 + d_{jk}(f)^2}$$

$$\phi_{jk}(f) = \arctan d_{jk}(f) / c_{jk}(f)$$

$$p_{jk}(f) = \alpha_{jk}(f)e^{i\phi_{jk}(f)}$$

$$\text{coh}_{jk}(f) = \frac{\alpha_{jk}(f)^2}{p_{jj}(f)p_{kk}(f)}$$



$\alpha_{jk}(f)$  振幅スペクトル

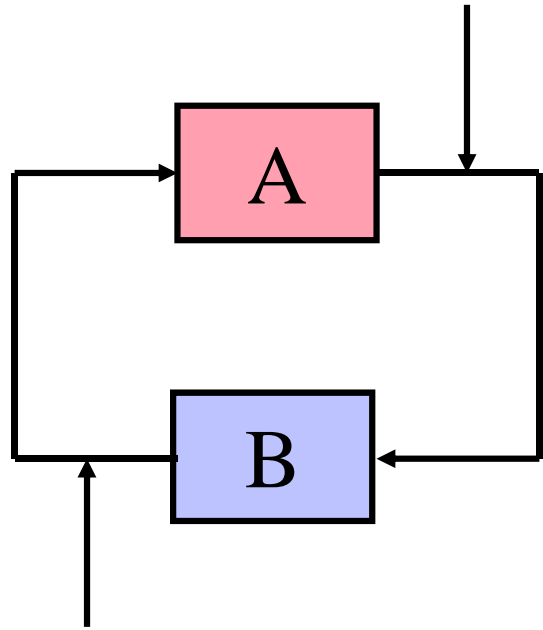
$\phi_{jk}(f)$  位相スペクトル

$p_{jk}(f)$  クロススペクトル

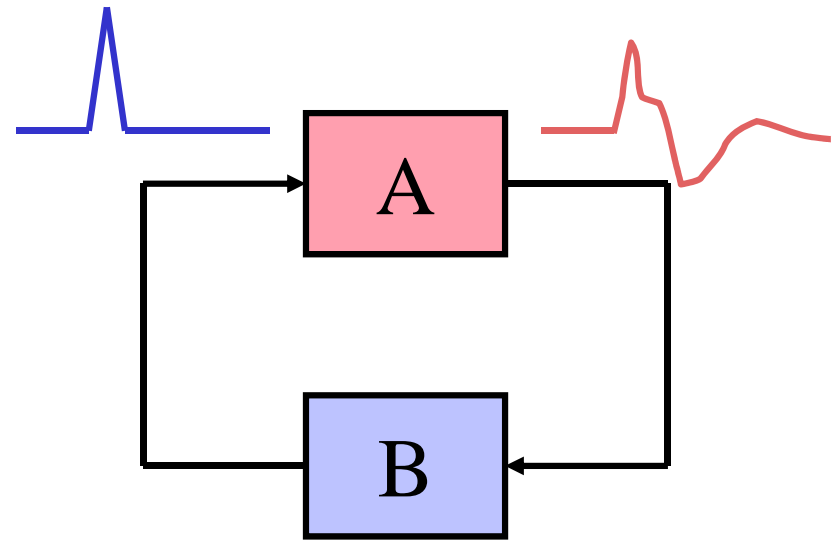
$\text{coh}_{jk}(f)$  コヒーレンシー

# インパルス応答関数

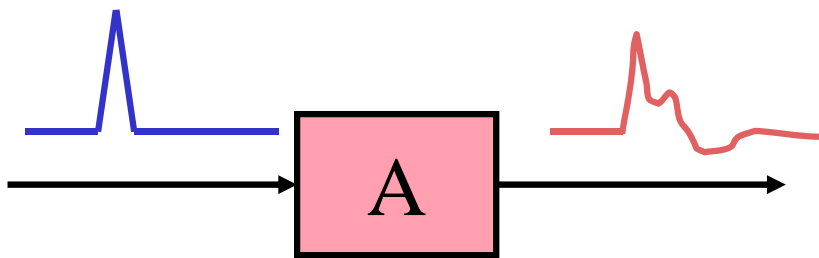
フィードバックシステム



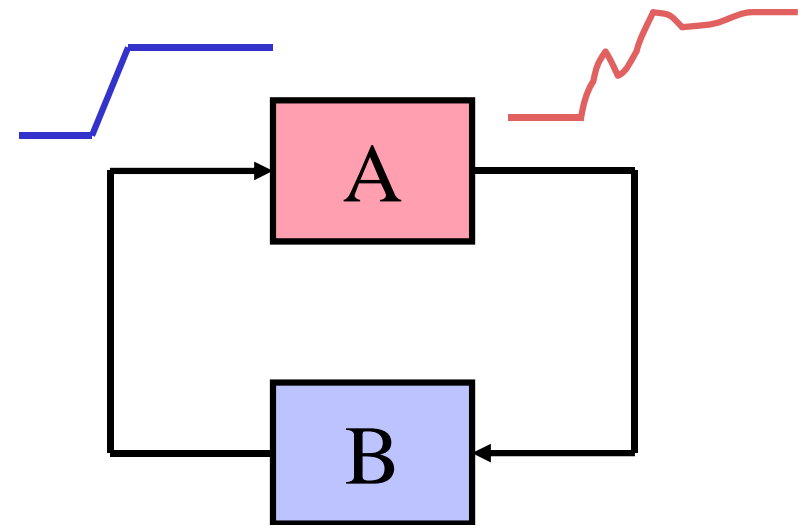
インパルス応答関数 (開ループ)



インパルス応答関数 (開ループ)



ステップ応答関数



# フィードバックシステムの解析

## フィードバックシステム

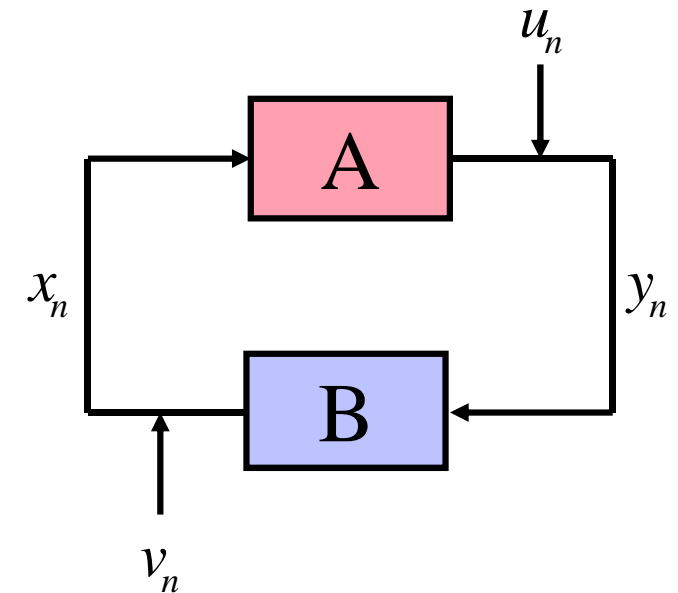
- ・ 農産物の生産量と価格
- ・ 石油価格とエコカーの販売量など

周波数応答関数ではフィードバックシステムの解析は困難 ( $u_n$ が白色雑音でない限り  $u_n$ と  $x_n$ は無相関とならない)

工学的システム以外ではフィードバックを切断して実験を行うのは困難

2変量 ( $x_n$ と  $y_n$ ) の場合

一般の場合 (省略)



# 2変量フィードバックシステム

$$y_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{n-j} + u_n$$

$a_j$  Aのインパルス応答関数

$b_j$  Bのインパルス応答関数

$$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} b_j y_{n-j} + v_n$$

$u_n, v_n$  互いに無相関な外乱

- 問題

$x_n$ と $y_n$ の観測値からインパルス応答関数 $a_j, b_j$ および外乱 $u_n, v_n$ の特性を推定

- 白色化の必要性

通常最小二乗法では、 $x_n$ と $u_n$ に相関があるために良い推定値が得られない。

- $u_n$ と $v_n$ をARモデルにより白色化する

$$u_n = \sum_{j=1}^{\infty} c_j u_{n-j} + \varepsilon_n, \quad v_n = \sum_{j=1}^{\infty} d_j v_{n-j} + \delta_n$$

# 2変量フィードバックシステム

$$y_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{n-j} + u_n \quad u_n = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_{n-i} + \varepsilon_n$$

$$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} b_j y_{n-j} + v_n \quad v_n = \sum_{i=1}^{\infty} d_i v_{n-i} + \delta_n$$

$$u_n = y_n - \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{n-j}$$

$$y_n - \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{n-j} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (y_{n-i} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{n-i-j}) + \varepsilon_n$$

$$y_n = \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_{n-i} - \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{n-j} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_i a_j x_{n-i-j} + \varepsilon_n$$

$$a_j(1,1) = c_j, (j=1,2,\dots), a_1(1,2) = a_1, a_j(1,2) = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} c_i a_{j-i}$$

$$y_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(1,1) y_{n-j} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(1,2) x_{n-j} + \varepsilon_n$$

$$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(2,1) y_{n-j} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(2,2) x_{n-j} + \delta_n$$

2変量ARモデル!  
ただし、変数間に  
制約あり

# モデルを求める方法

---

## 1. 2変量ARモデル

$$\begin{bmatrix} y_n \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} a_j(1,1) & a_j(1,2) \\ a_j(2,1) & a_j(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n-j} \\ x_{n-j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}$$

## 2. ノイズ $u_n$ と $v_n$ のモデル

$$c_j = a_j(1,1), \quad d_j = a_j(2,2)$$

## 3. A, Bのインパルス応答関数

$$\begin{aligned} a_j &= a_j(1,2) + \sum_{i=1}^{j-1} c_i a_{j-i}, & (j=2, \dots, m), & \quad a_j = \sum_{i=1}^{m-1} c_i a_{j-i}, & (j=m+1, \dots) \\ b_j &= a_j(2,1) + \sum_{i=1}^{j-1} d_i b_{j-i}, & (j=2, \dots, m), & \quad b_j = \sum_{i=1}^{m-1} d_i b_{j-i}, & (j=m+1, \dots) \end{aligned}$$

# 周波数応答関数

## 周波数応答関数

$$A(f) = \sum_{j=1}^m a_j e^{-2\pi i j f}, \quad B(f) = \sum_{j=1}^m b_j e^{-2\pi i j f}, \quad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$

## 外乱のパワースペクトル

$$p_{vv}(f) = \frac{\sigma_{vv}^2}{\left|1 - \sum_{j=1}^m c_j e^{-2\pi i j f}\right|^2}, \quad p_{uu}(f) = \frac{\sigma_{uu}^2}{\left|1 - \sum_{j=1}^m d_j e^{-2\pi i j f}\right|^2}$$

## 閉ループの周波数応答関数 ( $u_n$ から $x_n$ および $v_n$ から $x_n$ )

$$1 + B(f)A(f) + (B(f)A(f))^2 + \dots = (1 - B(f)A(f))^{-1}$$

$$A(f) + A(f)B(f)A(f) + A(f)(B(f)A(f))^2 + \dots = A(f)(1 - B(f)A(f))^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} (1 - A(f)B(f))^{-1} & B(f)(1 - A(f)B(f))^{-1} \\ A(f)(1 - B(f)A(f))^{-1} & (1 - B(f)A(f))^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -B(f) \\ -A(f) & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

# パワースペクトルの分解

---

$$\begin{bmatrix} (1-A(f)B(f))^{-1} & B(f)(1-A(f)B(f))^{-1} \\ A(f)(1-B(f)A(f))^{-1} & (1-B(f)A(f))^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -B(f) \\ -A(f) & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$y_n$  と  $x_n$  のパワースペクトル

$$p_{yy}(f) = |c_{11}|^2 p_{vv}(f) + |c_{12}|^2 p_{uu}(f)$$

$$p_{xx}(f) = |c_{21}|^2 p_{vv}(f) + |c_{22}|^2 p_{uu}(f)$$

パワー寄与率

$$r_{yv}(f) = \frac{|c_{11}|^2 p_{vv}(f)}{p_{yy}(f)}, \quad p_{yu}(f) = \frac{|c_{12}|^2 p_{uu}(f)}{p_{yy}(f)}$$

$$r_{xv}(f) = \frac{|c_{21}|^2 p_{vv}(f)}{p_{xx}(f)}, \quad p_{xu}(f) = \frac{|c_{22}|^2 p_{uu}(f)}{p_{xx}(f)}$$



# パワー寄与率

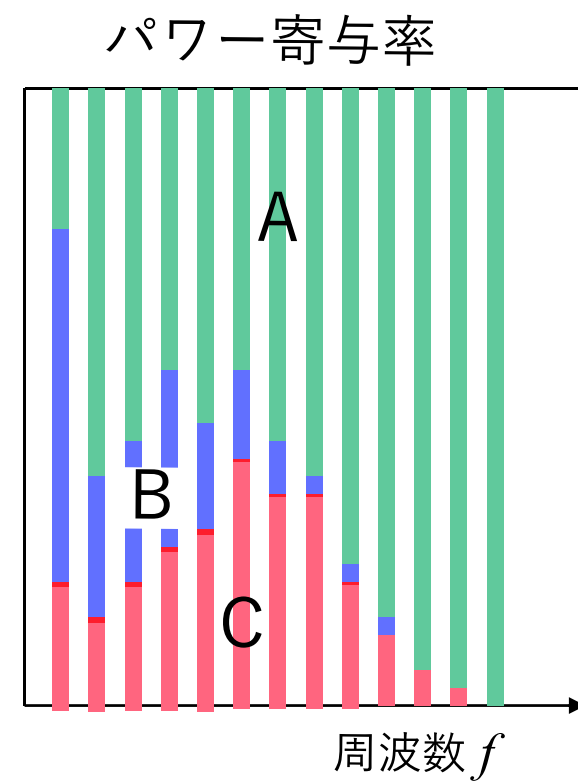
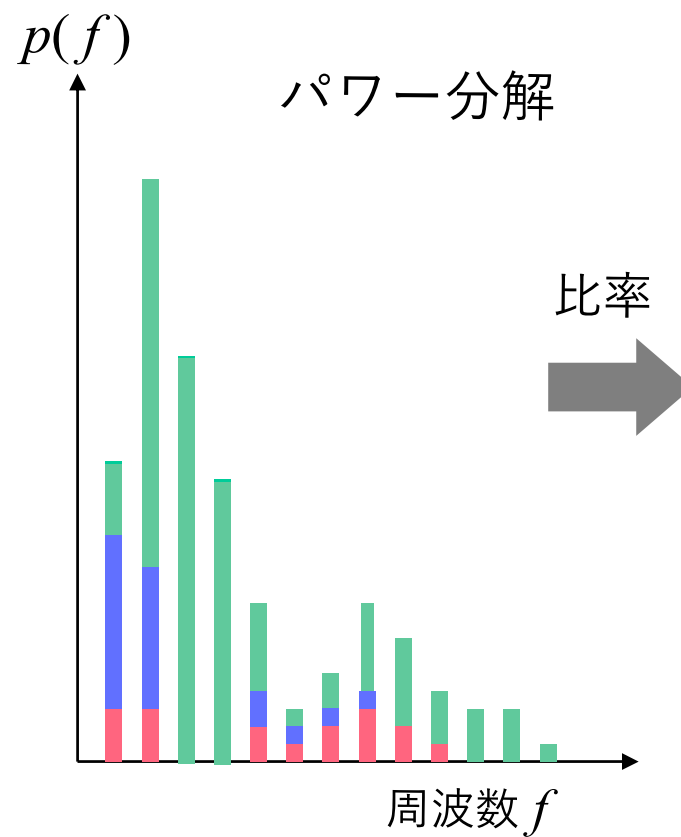
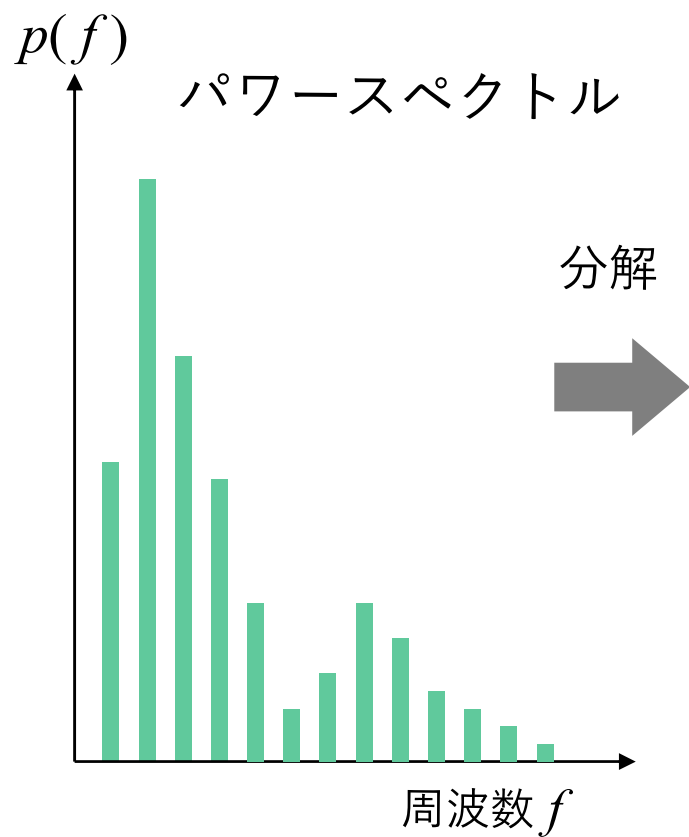
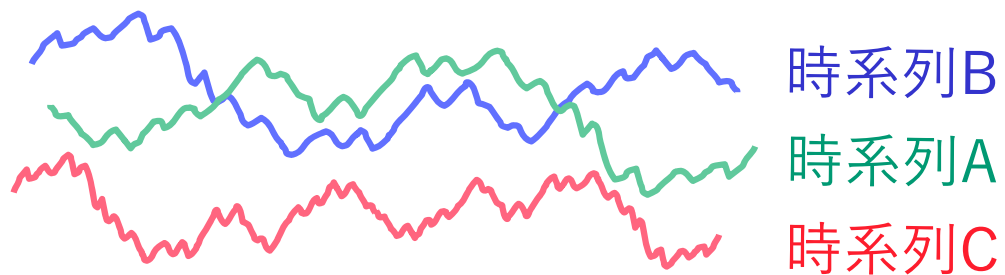
$$p_{ii}(f) = \sum_{j=1}^{\ell} b_{ij}(f) \sigma_j^2 b_{ij}(f)^* \equiv \sum_{j=1}^{\ell} |b_{ij}(f)|^2 \sigma_j^2 \quad \text{パワースペクトル}$$

$$r_{ij}(f) = \frac{|b_{ij}(f)|^2 \sigma_j^2}{p_{ii}(f)} \quad \text{パワーの分解}$$

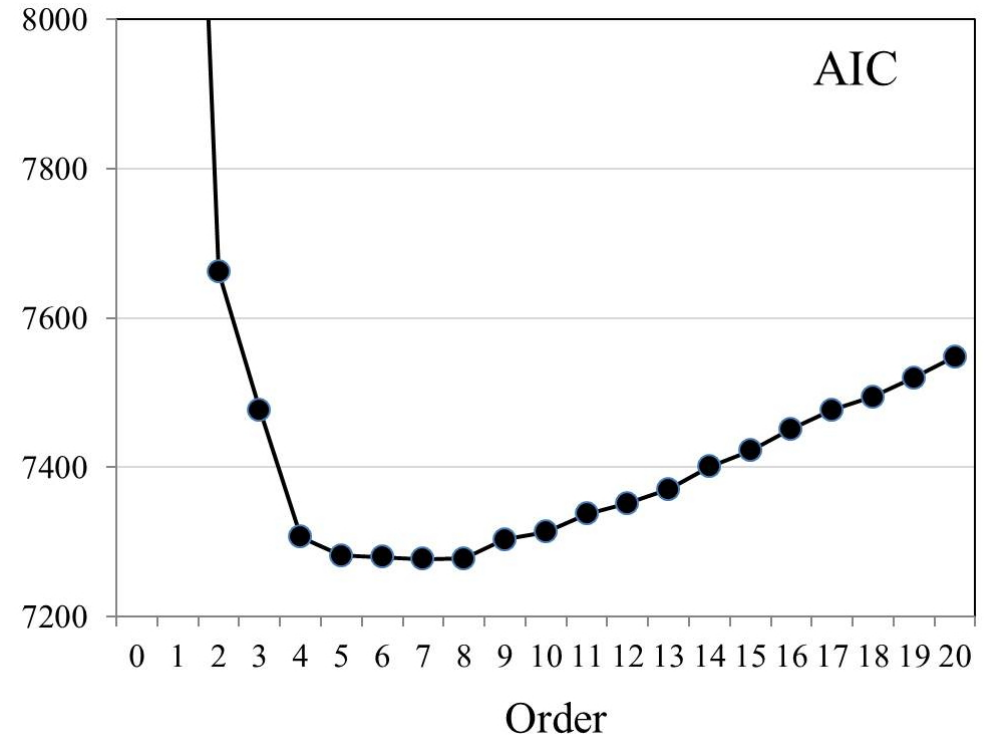
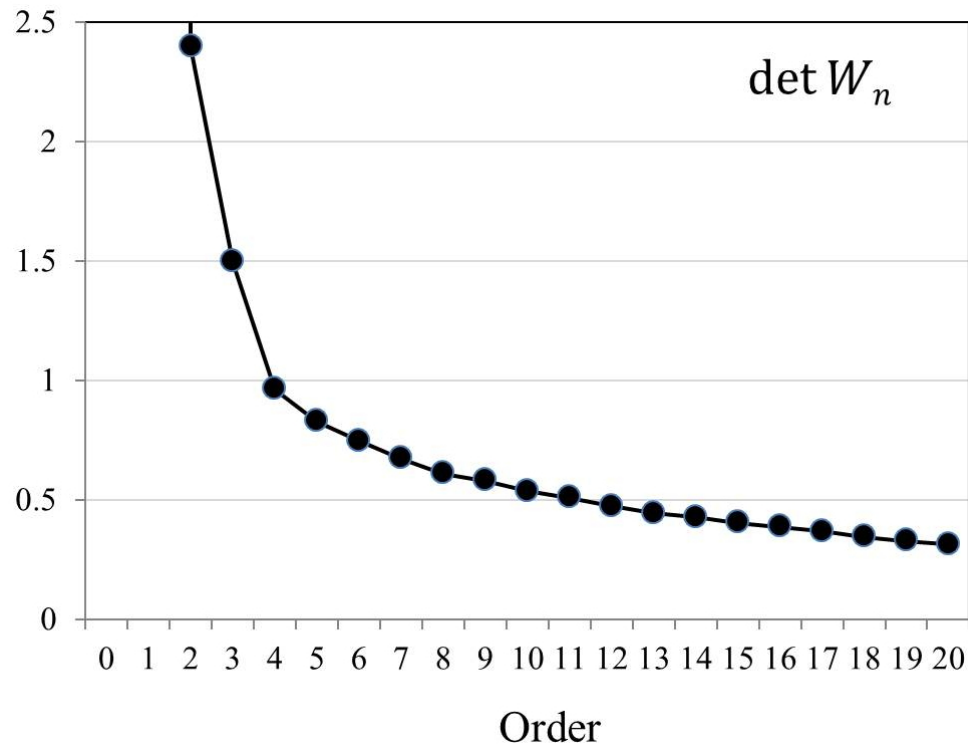
$$s_{ij}(f) = \sum_{k=1}^j r_{ik}(f) = \frac{\sum_{k=1}^j |b_{ik}(f)|^2 \sigma_k^2}{p_{ii}(f)} \quad \text{パワー寄与率}$$

- パワースペクトルをノイズソース毎に分解したもの
- どのノイズに起因するものかが分かる
- ノイズの直交性を仮定している
- ノイズに相関がある場合：一般パワー寄与率

# パワー寄与率



# 船体運動データ (5変量)



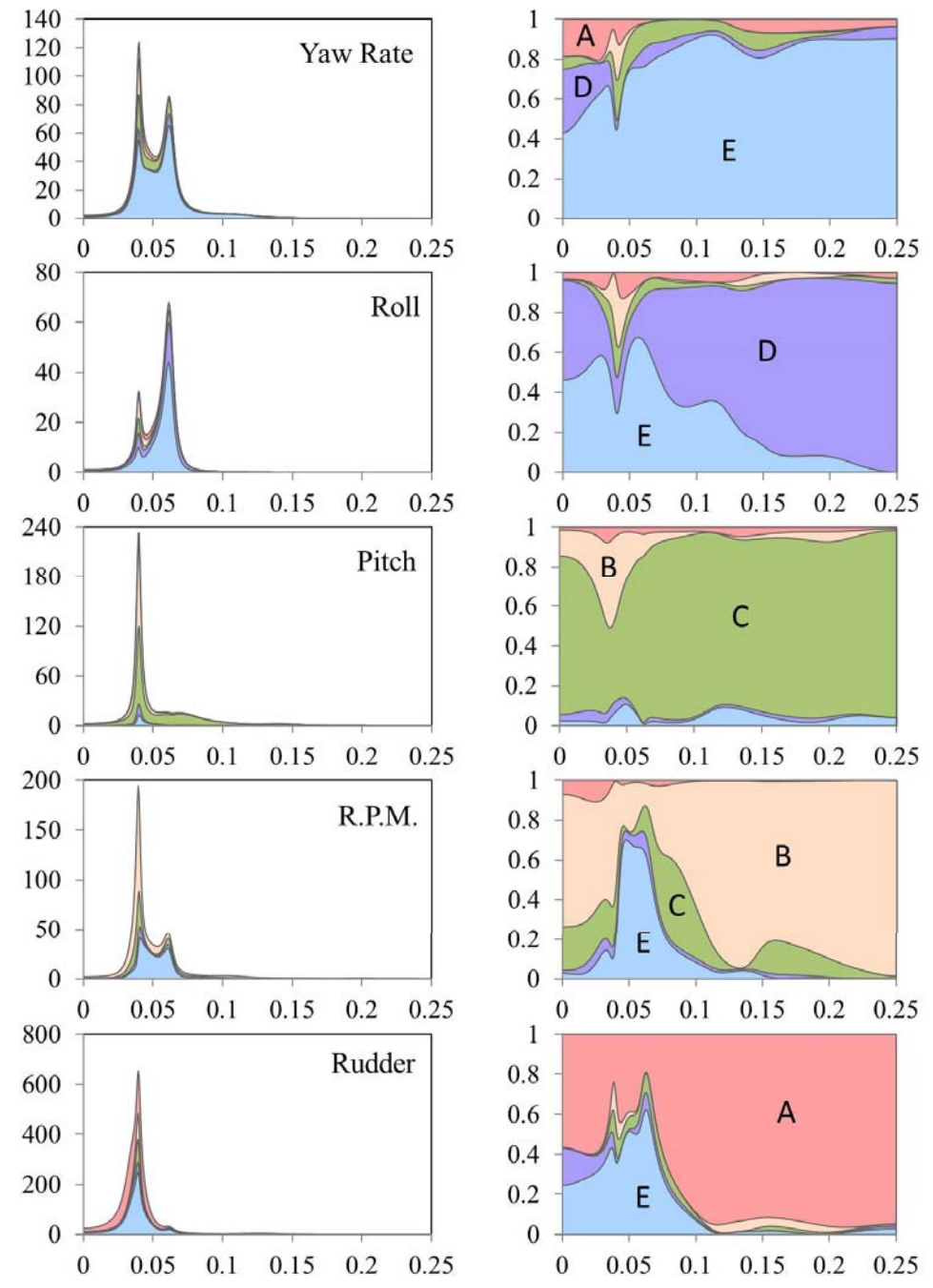
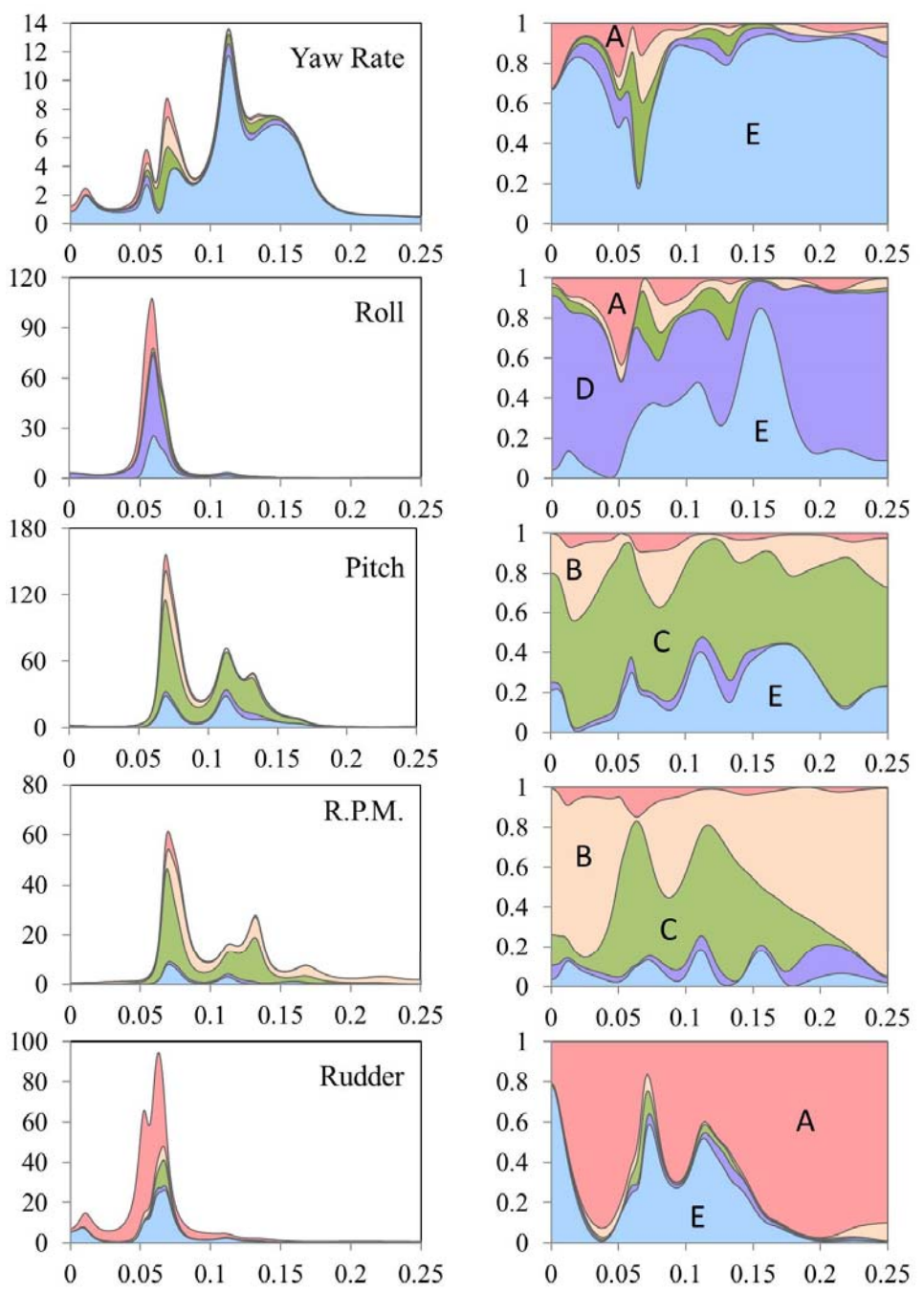
5変量 (方向角速度, 横揺れ, 縦揺れ, 回転数, 舵角)

# Autopilot Control

# Manual Control

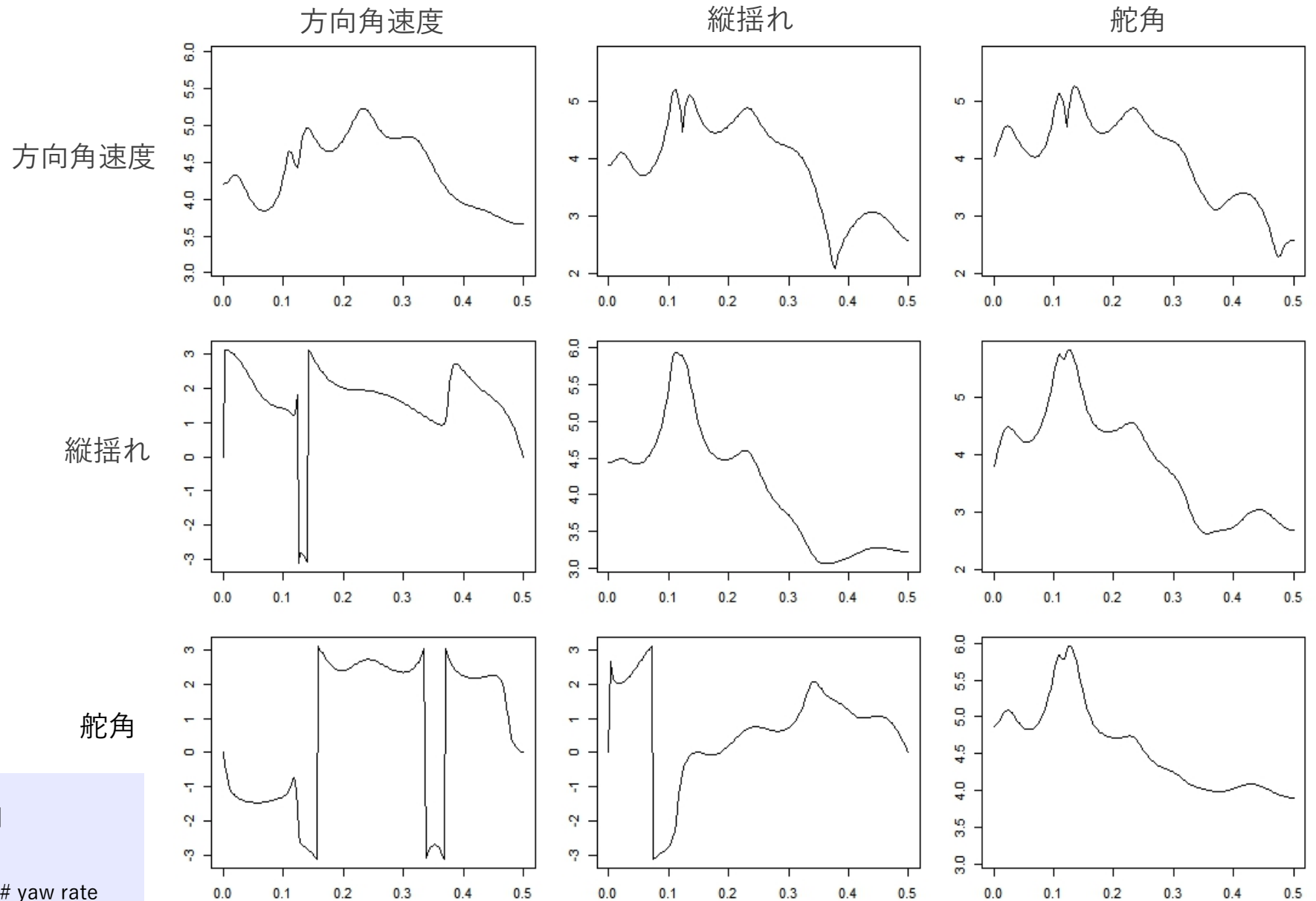
**A** Rudder **B** R.P.M. **C** Pitch **D** Roll **E** Yaw

**A** Rudder **B** R.P.M. **C** Pitch **D** Roll **E** Yaw



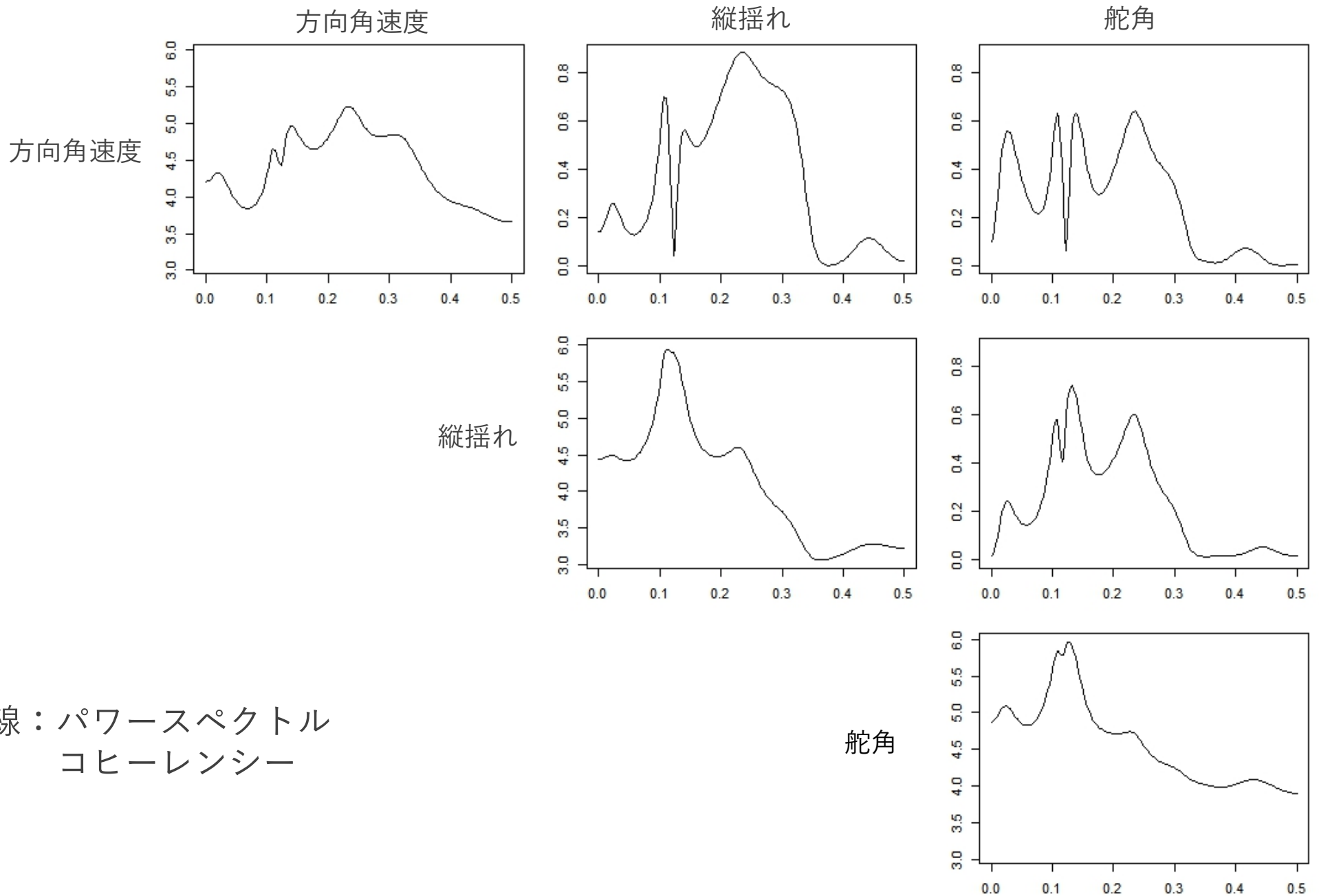
# クロススペクトル

対角線：スペクトル  
上：振幅スペクトル  
下：位相スペクトル



```
data(HAKUSAN)
length <- dim(HAKUSAN)[1]
y <- matrix(, length/2, 3)
for(i in 1:length/2) {
  y[i,1] <- HAKUSAN[i*2,1] # yaw rate
  y[i,2] <- HAKUSAN[i*2,2] # rolling
  y[i,3] <- HAKUSAN[i*2,4] # rudder
  marfit(y,20) # Yule-Walker法
  marlsq(y,20) # 最小二乗法
}
```

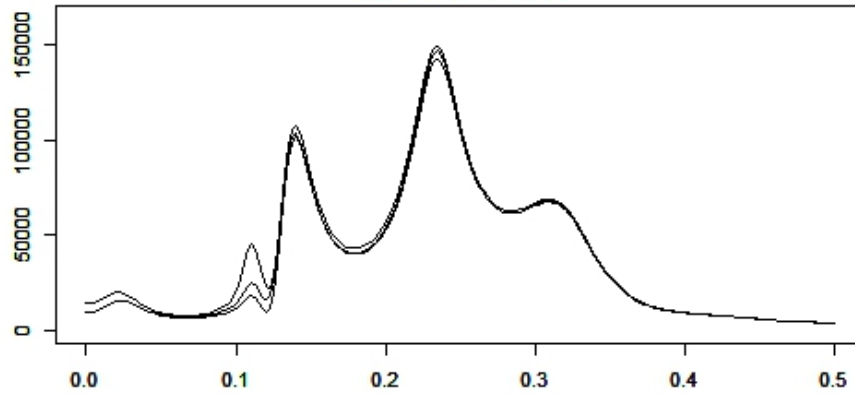
# パワースペクトルとコヒーレンシー



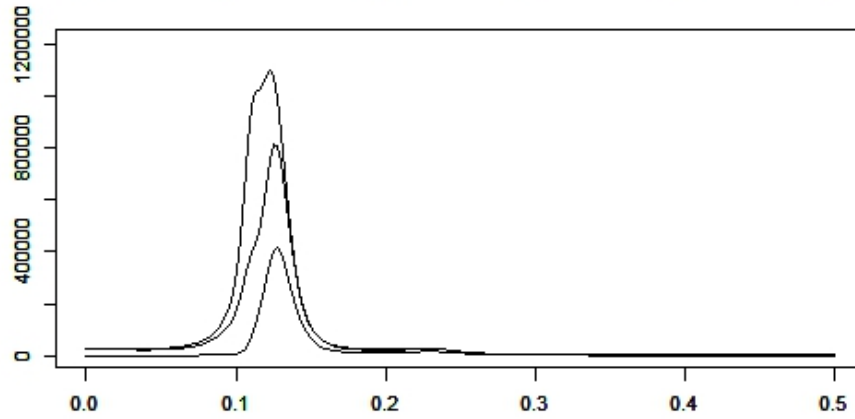
# パワー寄与率

## パワー分解

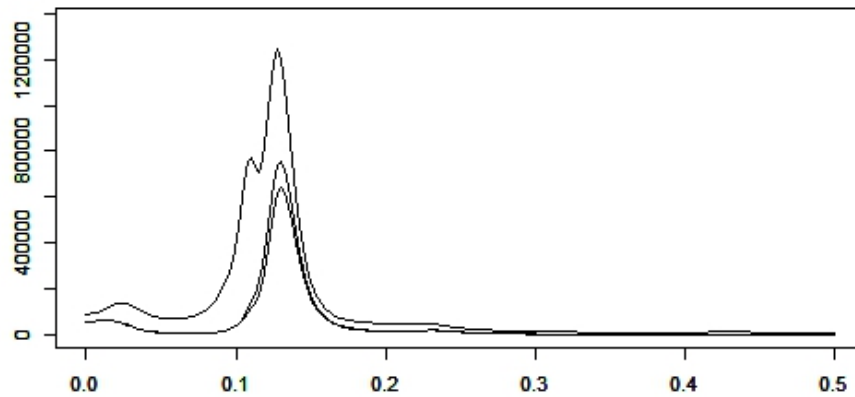
方向角速度



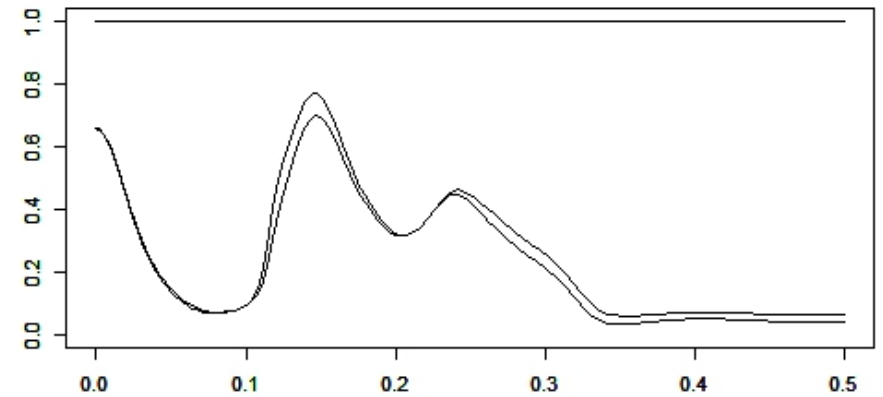
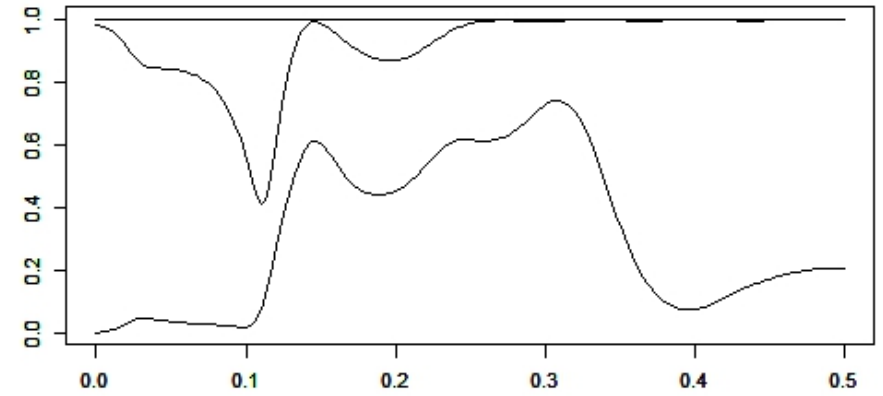
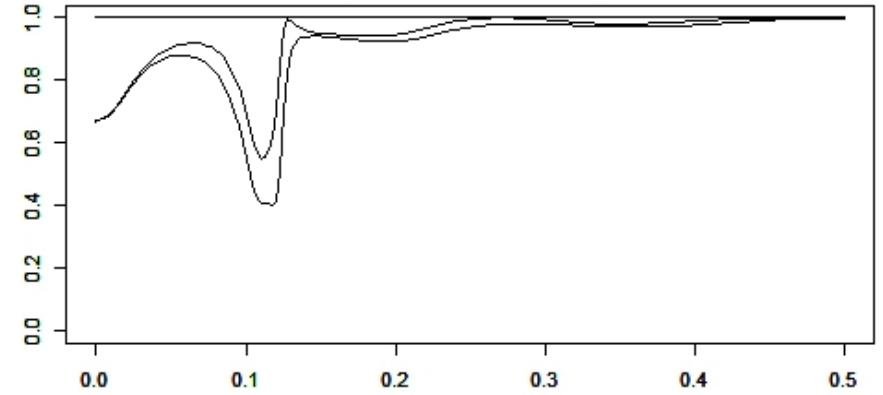
縦揺れ



舵角

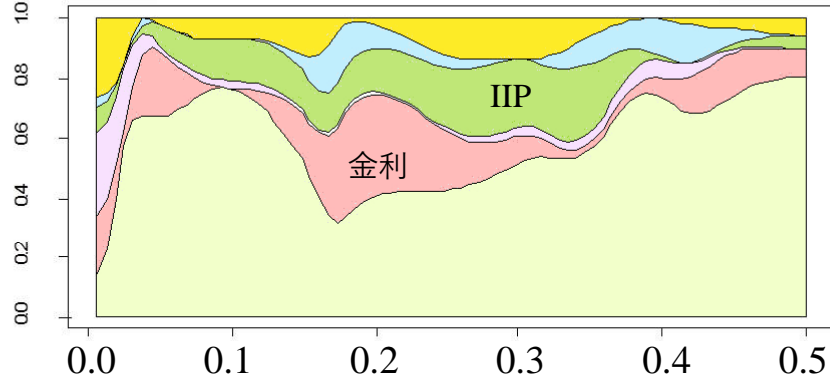


## パワー寄与率

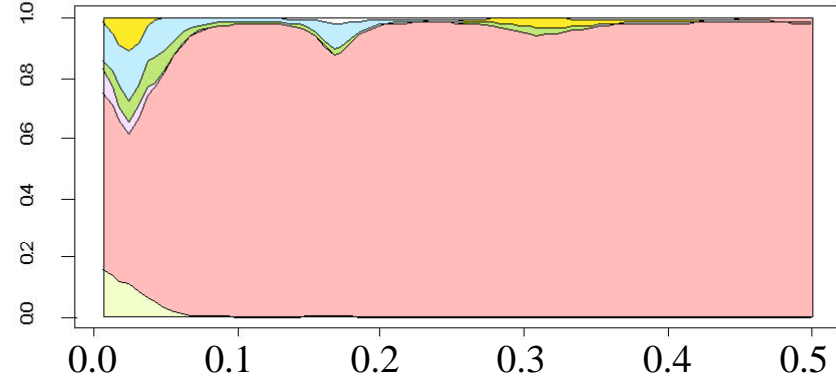


# パワー寄与率

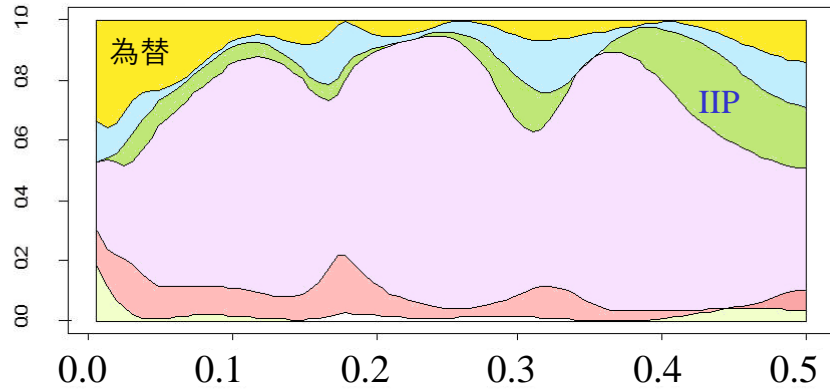
マネタリーベース



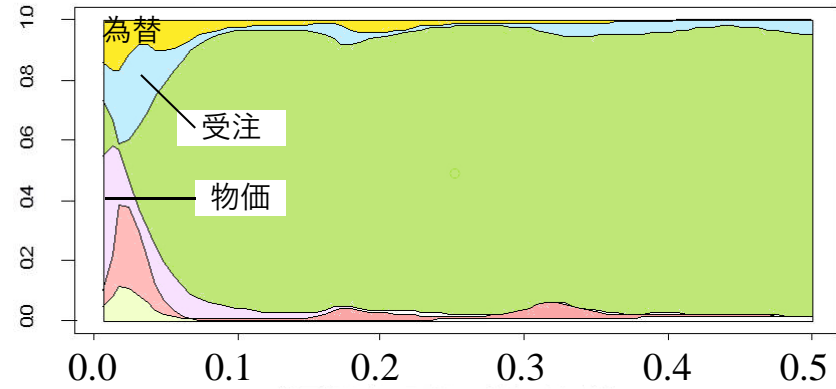
国債金利



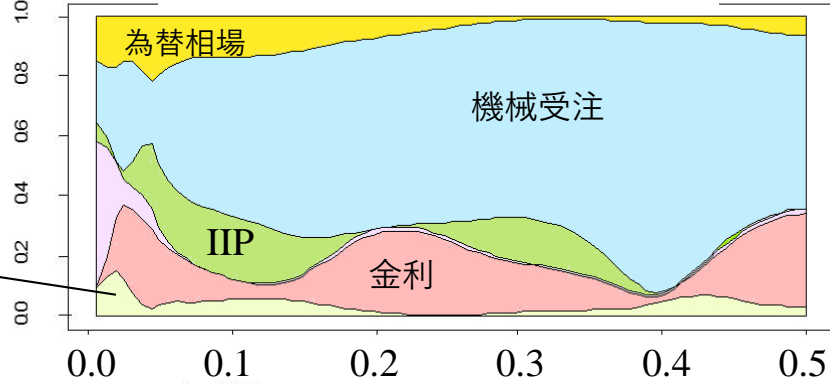
卸売物価



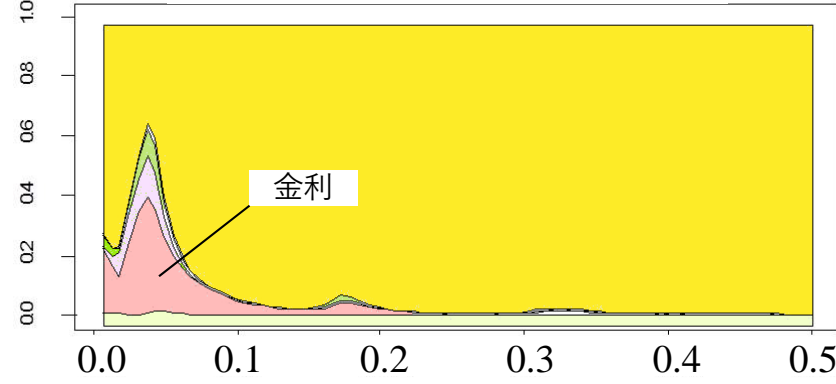
鉱工業生産指数



機械受注



為替相場



マネタリーベース