時系列解析（11）

－ボラティリティ、時変係数ARモデル－

東京大学 数理・情報教育研究センター
北川 源四郎

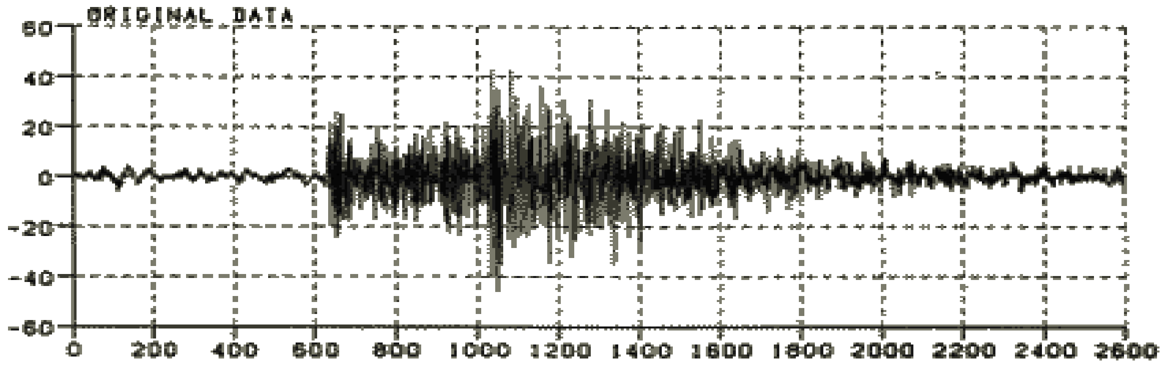
概 要

1. 分散非定常モデル：　線形化・正規近似
2. 共分散非定常モデル：時変係数モデル

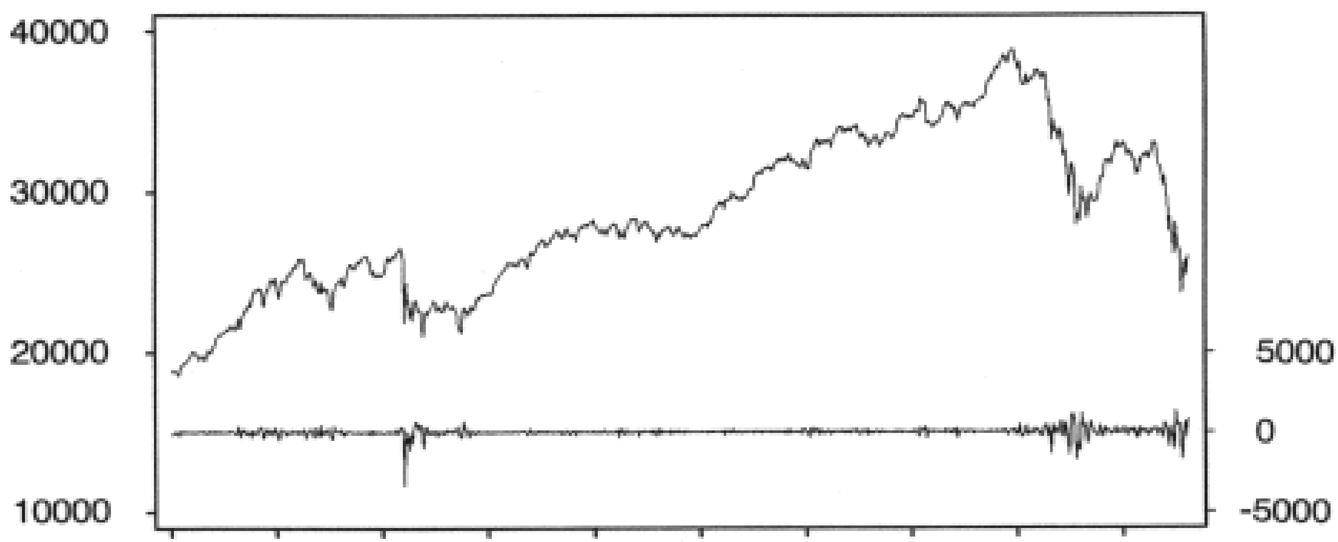
3. 非線形・非ガウス型状態空間モデル

分散・共分散非定常

地震波



日経225



非定常時系列のモデル

1．平均非定常　・・・　トレンド，季節調整

2．分散非定常

- 線形・ガウスモデル（カルマンフィルタ）で推定するためには、近似が必要（線形化＋正規近似）
- 非線形・非ガウス型状態空間モデルを使うと直接的なモデリングが可能

3．共分散非定常

- 時変係数モデル

（線形モデルによる）時変分散の推定

$$r_n = \sigma_n w_n , \quad w_n \sim N(0,1)$$

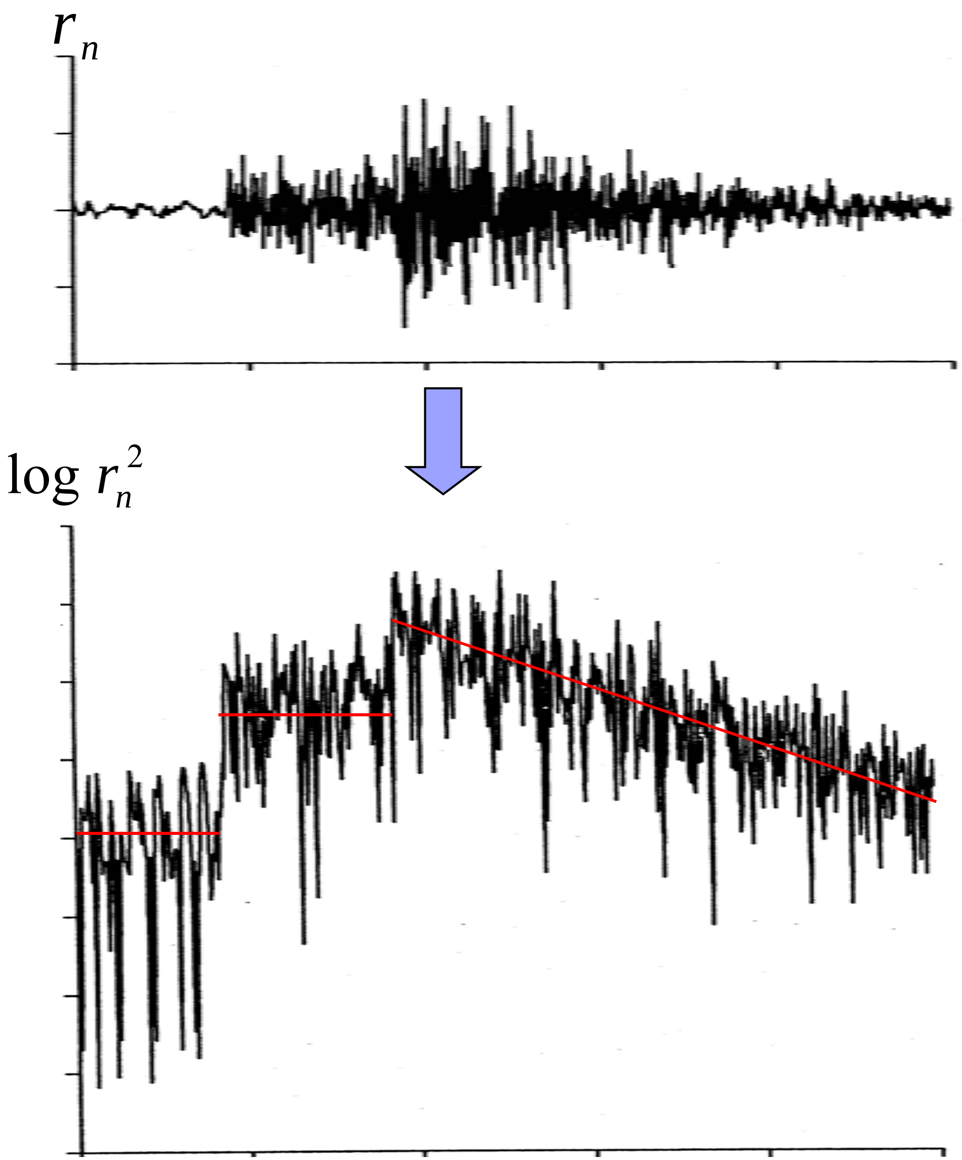
二乗

$$r_n^2 = \sigma_n^2 w_n^2$$

対数

$$\log r_n^2 = \log \sigma_n^2 + \log w_n^2$$

- 変換により分散変動の推定問題はトレンド推定の問題に変換される
- ただし，ノイズは正規分布ではない



（線形モデルによる）時変分散の推定

分散変化のモデル（例）

$$\log \sigma_n^2 = \log \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon_n$$

$$\log \sigma_n^2 = \alpha + \beta \log \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon_n$$

ランダムウォーク型

（定数付き）AR型

時変分散のモデル（例）

$$\log \sigma_n^2 = \log \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon_n$$

$$\log r_n^2 = \log \sigma_n^2 + \log w_n^2$$

状態空間表現

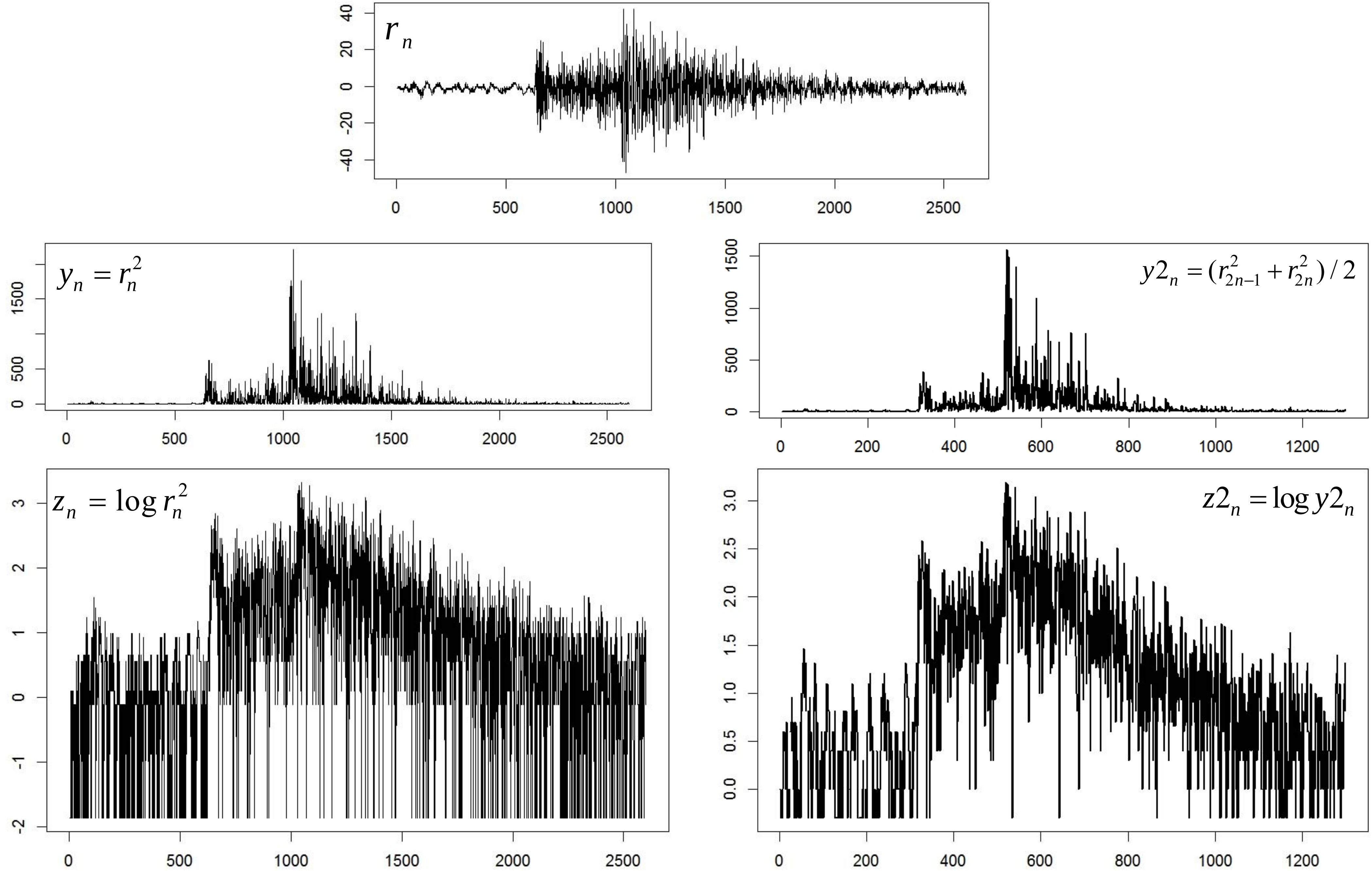
$$\log \sigma_n^2 = \log \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon_n$$
$$\log r_n^2 = \log \sigma_n^2 + \log w_n^2$$

$x_n \equiv \log \sigma_n^2,\ \ y_n \equiv \log r_n^2,\ \delta_n \equiv \log w_n^2$ とおくと

$$x_n = x_{n-1} + \varepsilon_n$$
$$y_n = x_n + \delta_n$$

- 状態空間表現
- δ_n は正規分布には従わない
  - ✓ 正規近似 → カルマンフィルタ
  - ✓ 非正規分布 → 非ガウス型フィルタ

二種類のデータ変換



r_n
$y_n = r_n^2$
$y2_n = (r_{2n-1}^2 + r_{2n}^2)/2$
$z_n = \log r_n^2$
$z2_n = \log y2_n$
0
500
1000
1500
2000
2500
200
400
600
800
1200
-40
-20
20
40
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
0.0
0.5
-2
-1
1
2
3

$\log w_n^2$ の分布：二重指数分布

$$y_n \sim N(0,1)$$

$$x_1 = y_1^2 \sim \chi_1^2 \qquad \text{(カイ二乗分布)}$$

$$g(x) = (2\pi x)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

$$x = h(y) = y^2$$

$$y \underset{h^{-1}}{\overset{h}{\rightleftarrows}} x$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}$$

$$x = h(y) = y^2 \Rightarrow h^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dh^{-1}}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$g(x) = \left|\frac{dh^{-1}}{dx}\right| \varphi(x \mid 0,1) = 2 \times \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

$$= (2\pi x)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

$$w_1 = \log x_1$$

$$p(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{w - e^w}{2}\right\}$$

(二重指数分布)

$$p(w) = \left|\frac{d \log^{-1}}{dw}\right| g(h^{-1}(w))$$

$$= \left|\frac{d \log^{-1}}{dw}\right| (2\pi e^w)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{e^w}{2}\right\}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{w}{2} - \frac{e^w}{2}\right\}$$

二重指数分布（Gumbel分布）

$$y_n \sim N(0,1)$$

$$s_2 = (y_1^2 + y_2^2)/2 \sim \frac{1}{2}\chi_2^2$$ (自由度 2 のχ^2分布=指数分布)

$$g(s) = \exp\{-s\}$$

$$w = h(s) = \log s$$

$$s \underset{h^{-1}}{\overset{h}{\rightleftarrows}} w$$

$$h^{-1}(w) = e^w$$

$$w_2 = \log s_2$$

$$\begin{aligned} p(w) &= \left|\frac{de^w}{dw}\right| g(h^{-1}(w)) \\ &= e^w \exp\left\{-e^w\right\} \\ &= \exp\left\{w - e^w\right\} \end{aligned}$$

$$p(w) = \exp\left\{w - e^w\right\}:$$ 二重指数分布

注：$p(-w)$ はGumbel分布

二重指数分布の正規分布による近似

$$\log\ w_n^2 \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ \frac{w}{2} - \frac{e^w}{2} \right\} \Rightarrow N(\varsigma, \pi^2/2), \quad \varsigma = -1.27036$$

$$\log w_n^2 \sim \exp\left\{ w - e^w \right\} \Rightarrow N(\gamma, \pi^2/6), \quad \gamma = -0.577216$$

γ　Euler定数

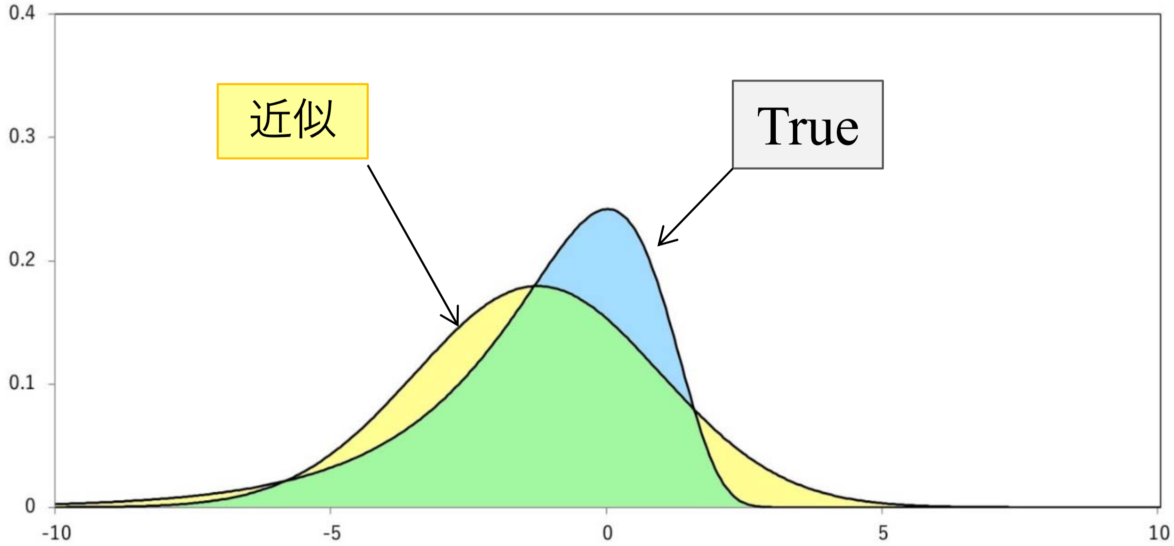
log-ピリオドグラムの平滑化
Wahba (1980)

時変分散・ボラティリティ
Kitagawa & Gersch (1985)
Nelson (1988),
Harvey, Ruiz, Shepard (1994)

-1.27036	4.934802
-0.577216	1.644934
-0.270363	0.644934

二重指数分布と正規近似

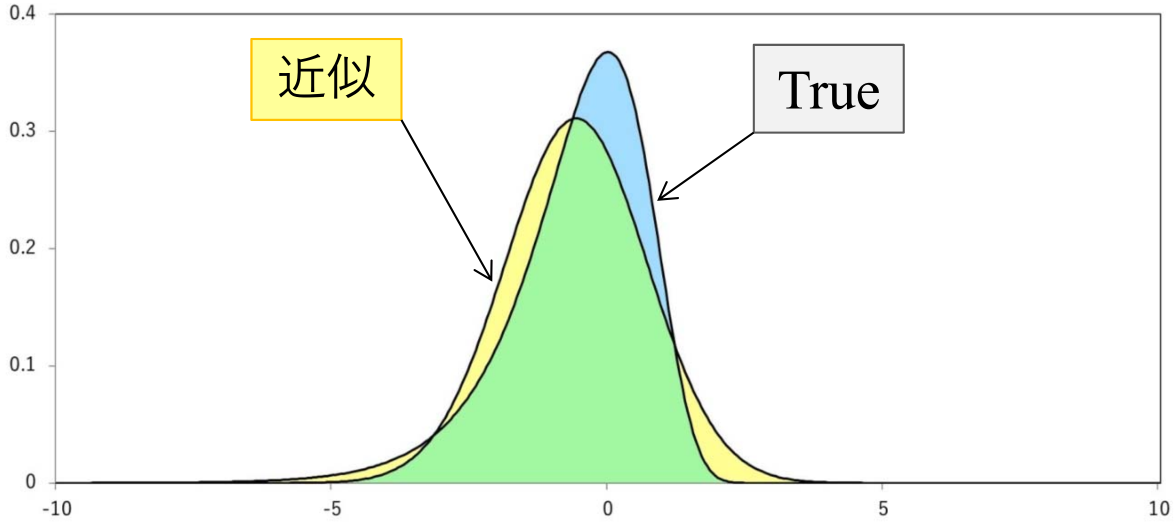
$\log \chi_1^2$



$\log(y_n^2)$

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{w - e^w}{2}\right\}$$

$\log \chi_2^2$



$\log(y_{2m-1}^2 + y_{2m}^2)$

$$g(w) = \exp\left\{w - e^w\right\}$$

- 正規近似が良くなる
- 分散が1/3
- データ数が1/2

分散変動(時変分散)モデル

$$\Delta^k t_m = v_m$$

$$z_m = t_m + w_m$$

$$h(w) = \exp\left\{w - e^w\right\} \sim N(-\gamma, \frac{\pi^2}{6}) \qquad \chi_2^2\text{-型}$$

$$h(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\tfrac{1}{2}(w - e^w)\right\} \sim N(-\varsigma, \frac{\pi^2}{2}) \qquad \chi_1^2\text{-型}$$

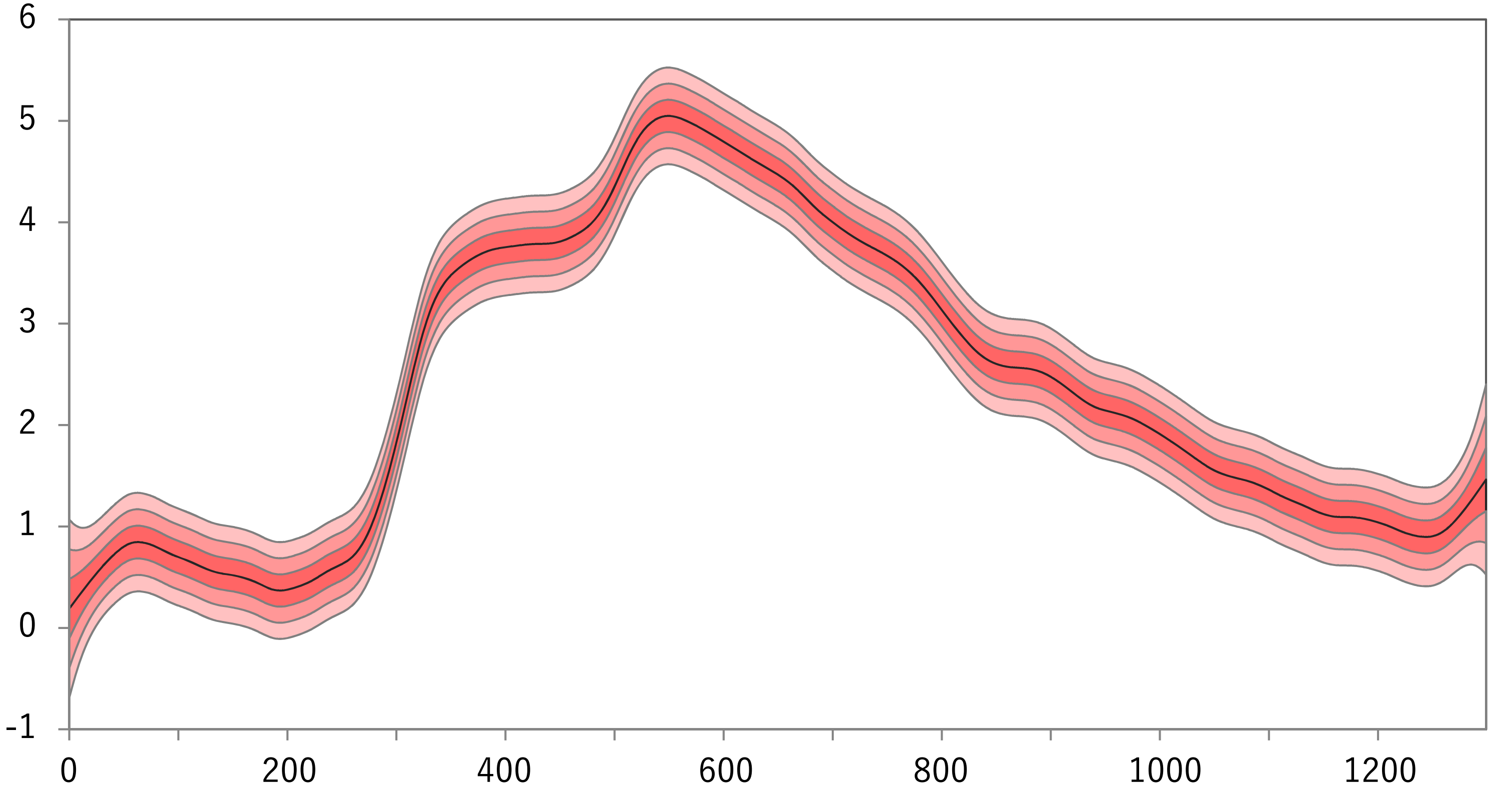
時変分散の推定： MYE１F

χ_2^2 - 型，トレンド次数＝2

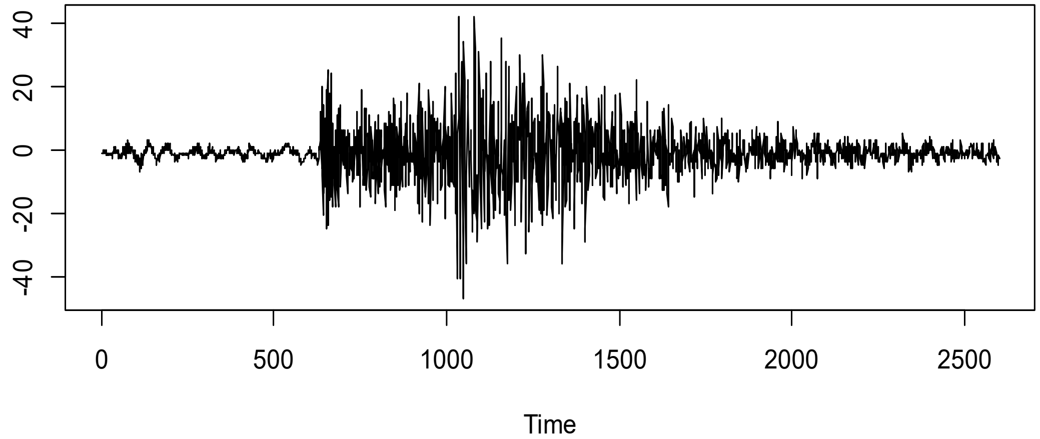
τ^2 = 6.6x10^{-6}， σ^2 = 9.71 x 10^{-1}

log-lkhd = -2195.731

AIC=4399.46



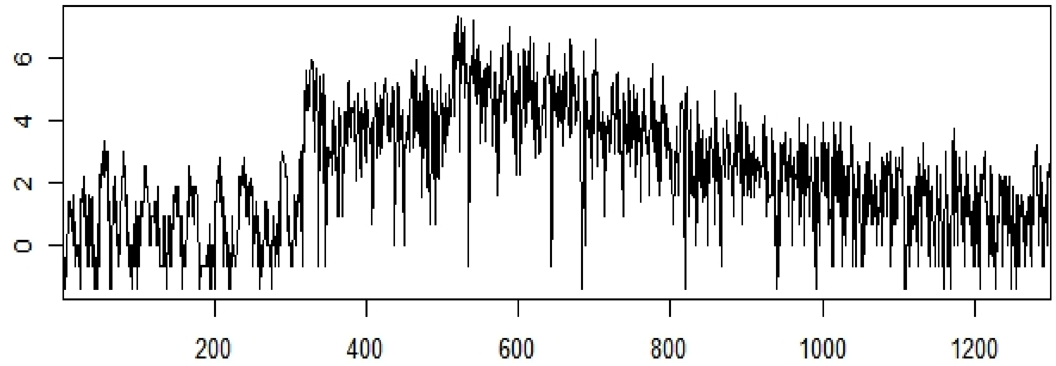
時変分散の推定とデータの等分散化



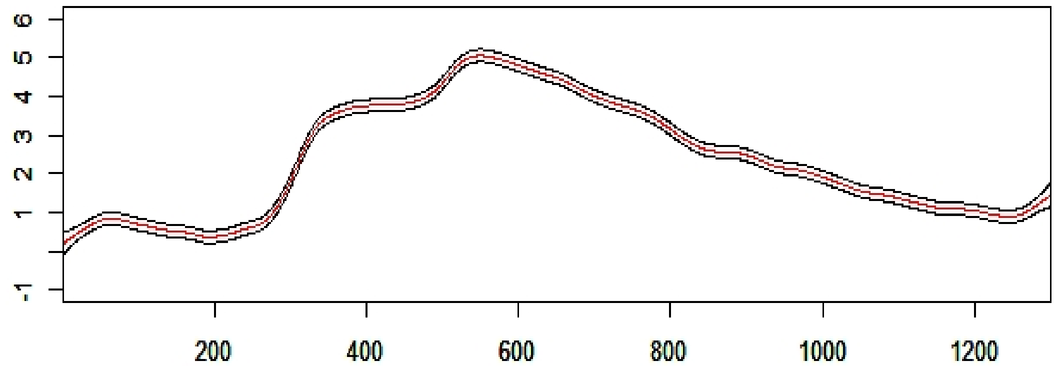

```
# an earthquake wave data
data(MYE1F)
#
tvvar(MYE1F, 2, 6.6e-06, 1.0e-06)
```

tau2	6.60000e-06
sigma2	9.71228e-01
log-likelihood	-2195.731
aic	4399.462

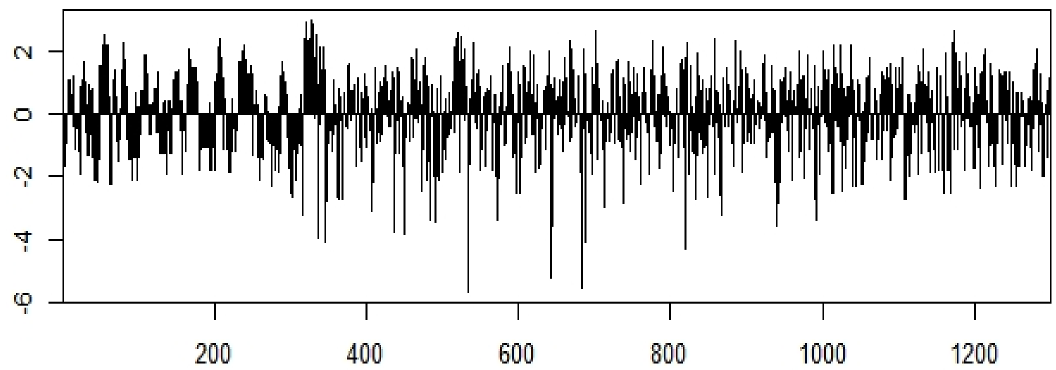
変換したデータ　MYE1F



時変分散



等分散化したデータ



AR型の分散変動モデル

ランダムウォークモデル

$$\log \sigma_n^2 = \log \sigma_{n-1}^2 + v_n$$
$$\log r_n^2 = \log \sigma_n^2 + \log w_n^2$$

AR 型モデル

$$\log \sigma_n^2 = \alpha + \beta \log \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon_n$$
$$\log r_n^2 = \log \sigma_n^2 + \log w_n^2$$

時変スペクトル

ARモデル ⇔ 自己共分散 ⇔スペクトル

$\Updownarrow$ 時変係数　　$\Updownarrow$ 非定常　　$\Updownarrow$ 時変

時変係数 AR モデル

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} a_{jn} y_{n-j} + w_n, \qquad w_n \sim N(0, \sigma^2)$$

時変係数回帰モデル

時変係数AR モデルの推定

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} a_{jn} y_{n-j} + w_n, \qquad a_{nj}$$ は時間とともに変動

係数変化のモデル

$$\Delta^k a_{jn} = v_{jn}, \qquad v_{jn} \sim N(0, \tau^2)$$

状態空間表現

$$x_n = F x_{n-1} + G v_n \qquad v_n \sim N(0, Q)$$
$$y_n = H_n x_n + w_n \qquad w_n \sim N(0, R)$$

x_n, F, G, H_n, Q, R を定める

時変係数ARモデル

$$F^{(1)} = G^{(1)} = H^{(1)} = 1$$

$$F^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = F^{(k)} \otimes I_m, \qquad G = G^{(k)} \otimes I_m$$

$$H_n = H^{(k)} \otimes (y_{n-1}, \cdots, y_{n-m})$$

$$Q = \tau^2 \otimes I_m, \qquad R = \sigma^2$$

$$x_n = (a_{1n}, \cdots, a_{mn})^T \otimes (I, B, \cdots, B^{k-1})$$

$\otimes$ Kronecker 積

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m\ell} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1\ell}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{m\ell}B \end{bmatrix}$$

$$F^{(1)} \otimes I_m = I_m, \qquad F^{(2)} \otimes I_m = \begin{bmatrix} 2I_m & -I_m \\ I_m & O \end{bmatrix}$$

状態空間表現（$k=1$ の場合）

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,n-1} \\ \vdots \\ a_{m,n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,n} \\ \vdots \\ v_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$y_n = [y_{n-1}, \cdots, y_{n-m}] \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} + w_n$$

$$Q = \begin{bmatrix} \tau^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \tau^2 \end{bmatrix}, \qquad R = \sigma^2$$

状態空間表現（$k=2$ の場合）

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \\ \hline a_{1n-1} \\ \vdots \\ a_{mn-1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & & & -1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 2 & & & -1 \\ \hline 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_{1n-1} \\ \vdots \\ a_{mn-1} \\ \hline a_{1n-2} \\ \vdots \\ a_{mn-2} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline & & \\ & & \\ & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} v_{1,n} \\ \vdots \\ v_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$y_n = [y_{n-1}, \cdots, y_{n-m}, 0, \cdots, 0] \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \\ \hline a_{1n-1} \\ \vdots \\ a_{mn-1} \end{bmatrix} + w_n$$

$$Q = \begin{bmatrix} \tau^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \tau^2 \end{bmatrix}, \quad R = \sigma^2$$

システムノイズの等分散仮定について

$Q=\mathrm{diag}\{\tau^2,\ldots,\tau^2\}$: の仮定は妥当か？

$$A(f,n)=1-\sum_{j=1}^{m}a_{nj}e^{-2\pi ijf}, \qquad -\frac{1}{2}\le f\le\frac{1}{2}$$

AR係数のフーリエ変換

$$p_n(f)=\frac{\sigma^2}{\left|A(f,n)\right|^2}$$

ARモデルを白色化フィルタと
考えたときの周波数応答関数

$A(f,n)$の時間変化の滑らかさに関する評価

$$\Delta^k A(f,n)=\sum_{j=1}^{m}\Delta^k a_{nj}e^{-2\pi ijf}$$

周波数領域-$\frac{1}{2}\le f\le\frac{1}{2}$で二乗積分

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\Delta^k A(f,n)|^2 df=\sum_{j=1}^{m}(\Delta^k a_{nj})^2$$

各次数を同じ割合で加算しているので

$$\Delta_n^k a_{nj}=v_{nj}, \qquad v_{nj}\sim N(0,\tau^2)$$

時変係数ARモデルのAIC

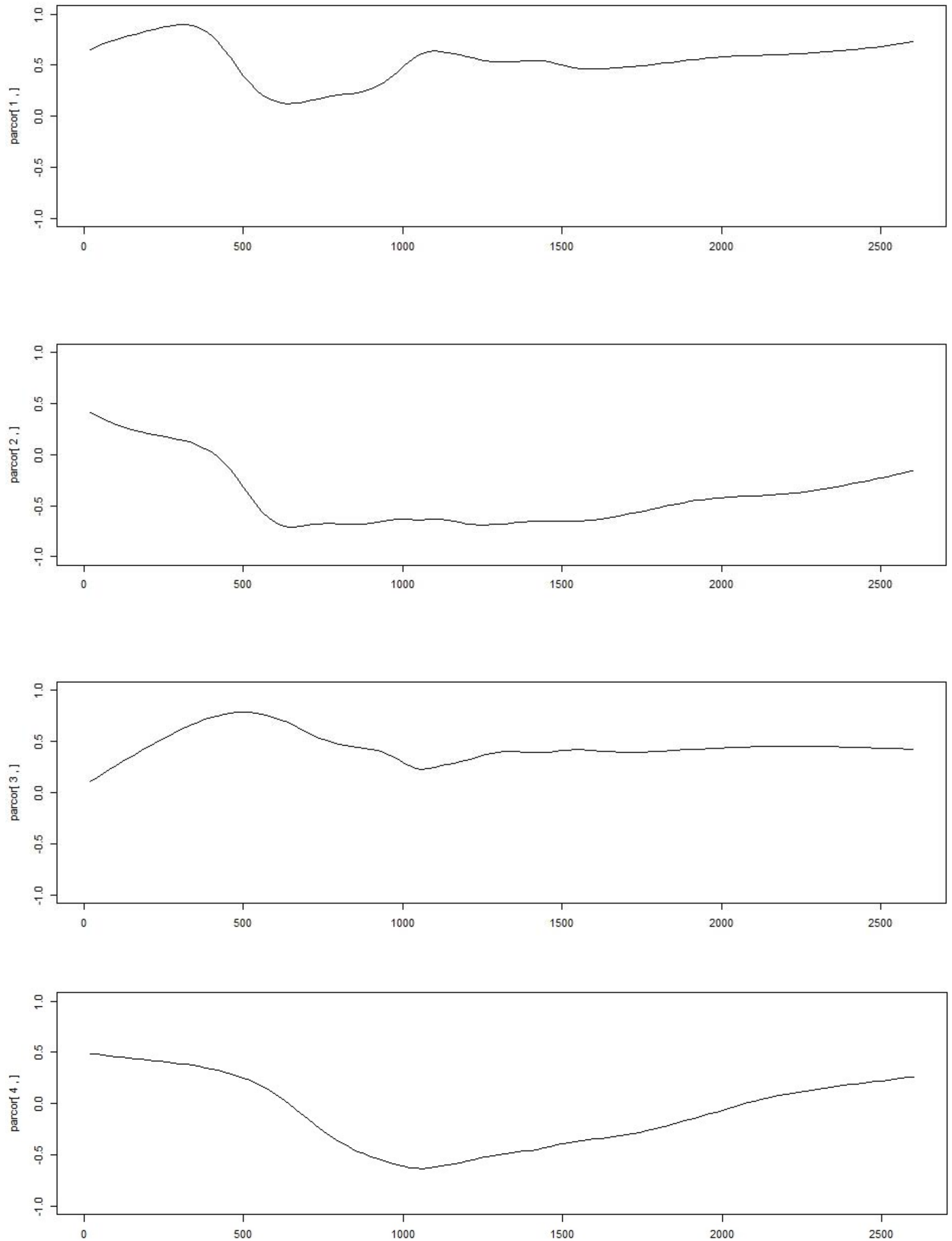
m	k=1	k=2	m	k=1	k=2
1	6492.5	6520.4	6	4831.9	4873.8
2	5527.7	5643.2	7	4821.6	4878.7
3	5070.0	5134.5	8	4805.1	4866.9
4	4820.0	4853.0	9	4813.4	4884.9
5	4846.0	4886.0	10	4827.1	4911.9

Rによる時変係数ARモデルの推定

```
data(MYE1F) # an earthquake wave data
z <- tvar(MYE1F, trend.order = 2, ar.order = 8,
span = 20,  tau2.ini = 6.6e-06, delta = 1.0e-06)

z

 tau2              1.60000e-06
 sigma2            1.43071e+01
 log-likelihood   -7284.520
 aic               14589.041
```



時変スペクトル

時変係数 AR モデル

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} a_{jn} y_{n-j} + w_n, \qquad w_n \sim N(0, \sigma^2)$$

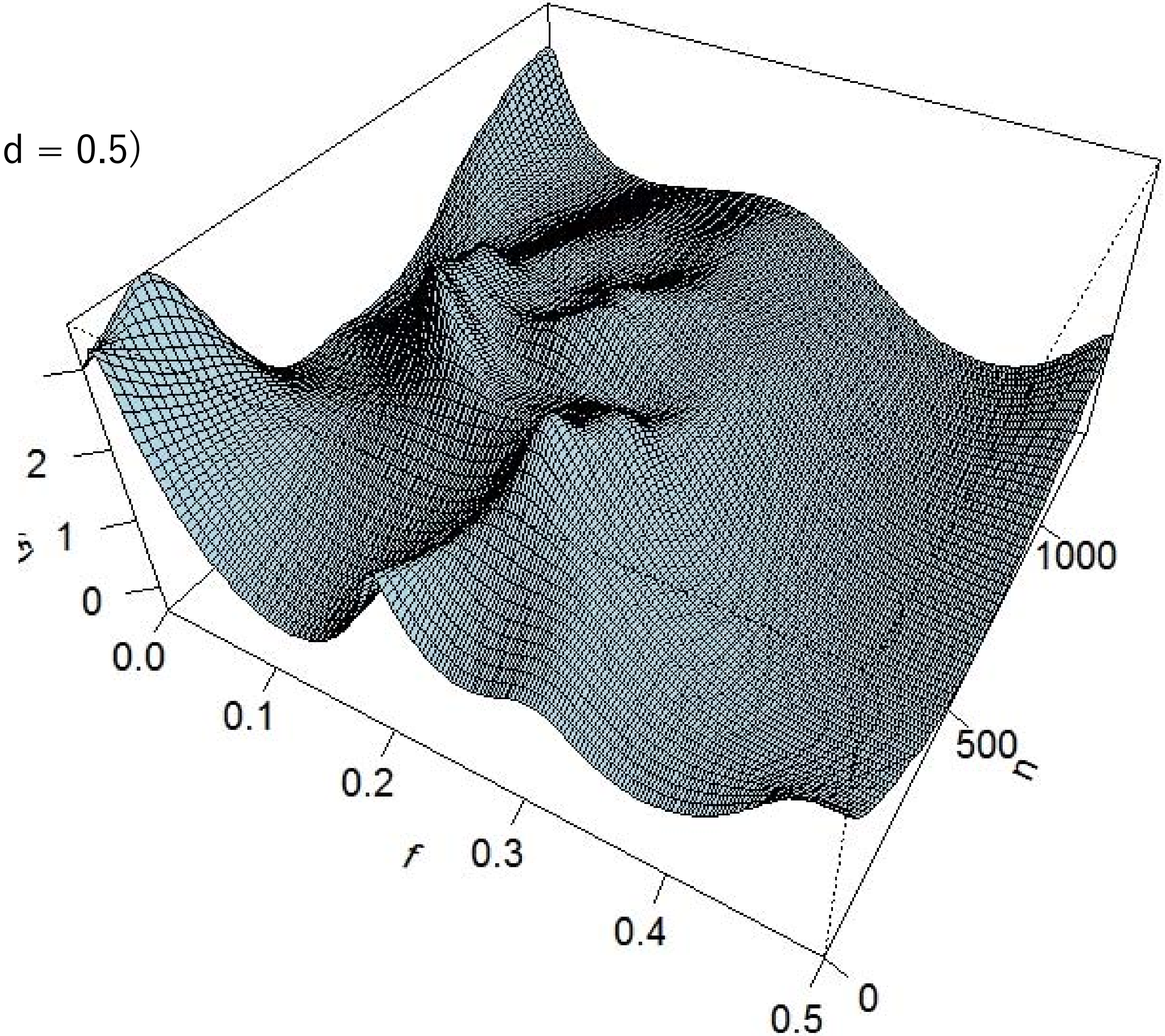
時変スペクトル

$$p_n(f) = \frac{\sigma_n^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^{m} a_{jn} e^{-2\pi ijf} \right|^2}$$

Rによる時変スペクトルの計算

```
z <- tvar(MYE1F, trend.order = 2, ar.order = 8,
span = 20,  tau2.ini = 6.6e-06, delta = 1.0e-06)

#  時変スペクトル
spec <- tvspc(z$arcoef, z$sigma2)
plot(spec, theta = 30, phi = 40, expand = 0.5)
```



係数の急激な変化について

- トレンドモデルによる変化はゆっくりした変化を仮定している
- 地震波などでは突然別のモデルに変化することがある。

- 対応１
  - 変化点既知の場合

    k=1の場合：　その時点でτ^2を大きくすればよい

    k=2の場合：　それだけでは屈折点となる

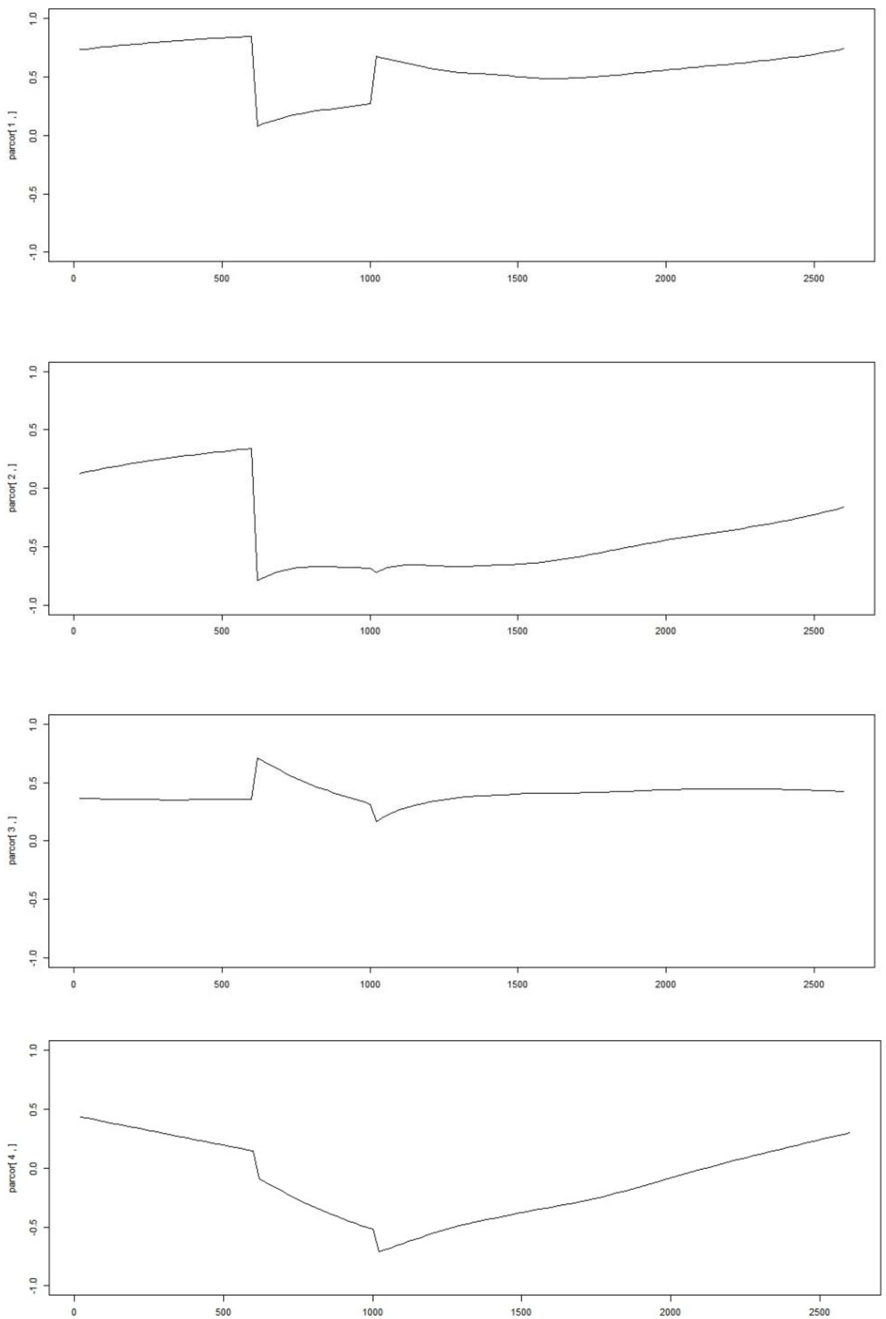
    - $x_{n|n\text{-}1}$と$V_{n|n\text{-}1}$を初期化するか$V_{n|n\text{-}1}$の対角成分に大きな値を入れる

- 対応２：　非ガウス型モデルを利用する（変化点未知でよい）

Rによる時変係数ARモデルの推定（構造変化を仮定）

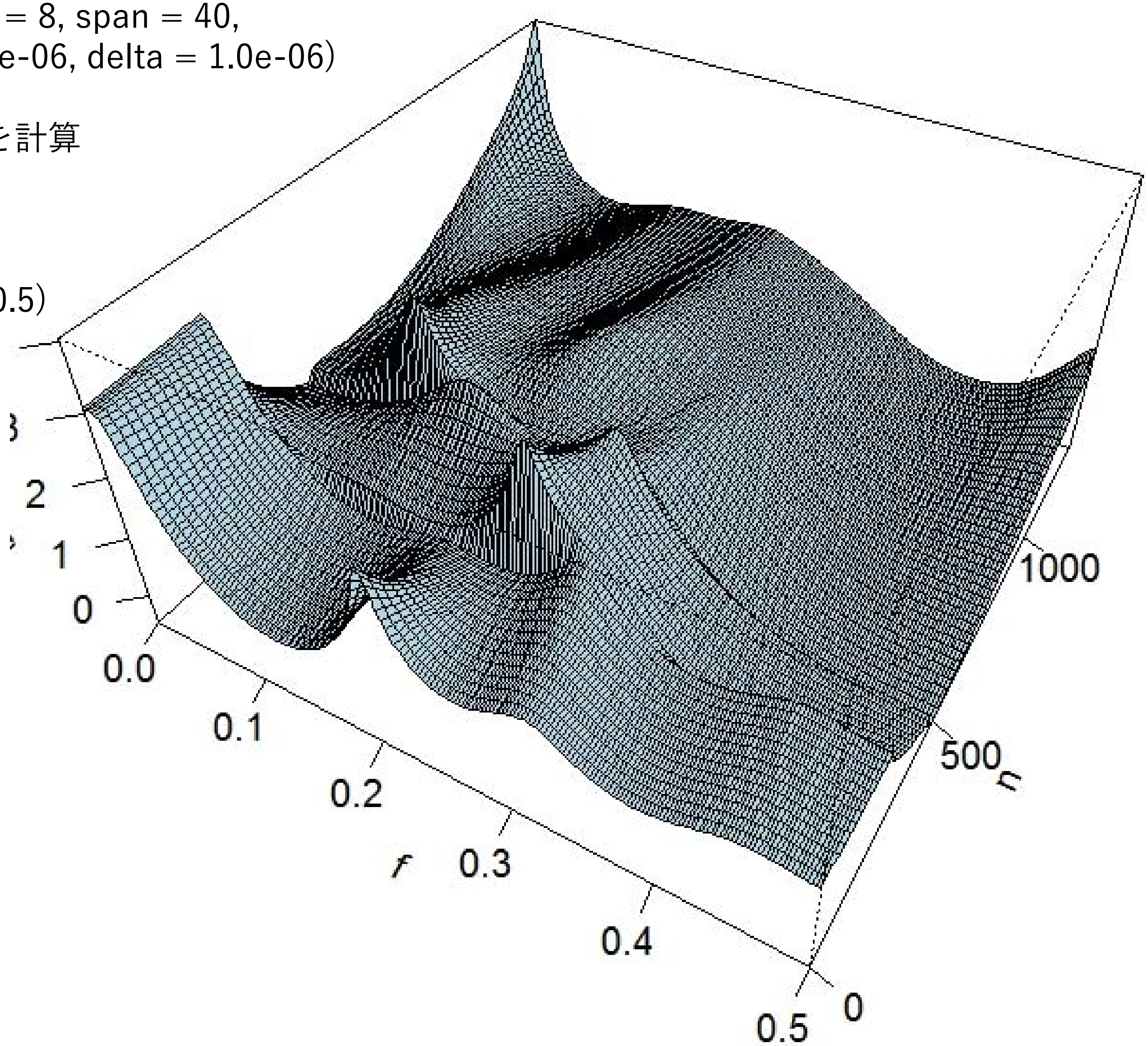
```
z <- tvar(MYE1F, trend.order = 2, ar.order = 8,
span = 40,  outlier = c(630, 1026), tau2.ini = 6.6e-06,
delta = 1.0e-06)
```

構造変化の時点

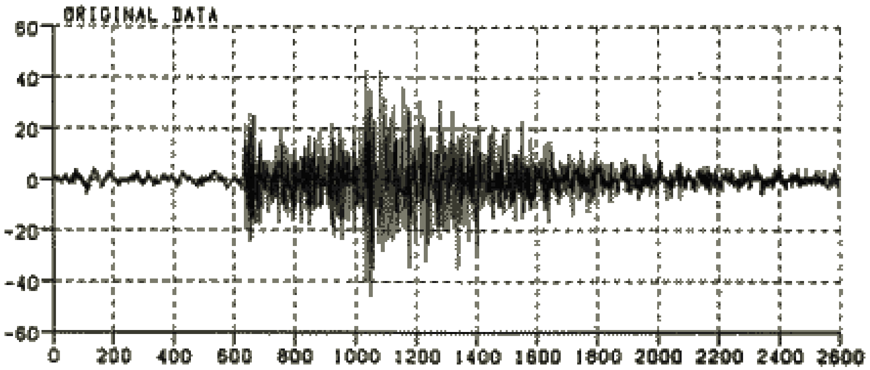


Rによる時変スペクトルの推定（構造変化を仮定）

```
#   n=630と1026の2か所で構造変化があったと仮定
#
z <- tvar(MYE1F, trend.order = 2, ar.order = 8, span = 40,
         outlier = c(630, 1026), tau2.ini = 6.6e-06, delta = 1.0e-06)
#
#   時変係数ARモデルから時変スペクトルを計算
#   時変スペクトルを3次元表示
#
spec <- tvspc(z$arcoef, z$sigma2)
plot(spec, theta = 30, phi = 40, expand = 0.5)
```

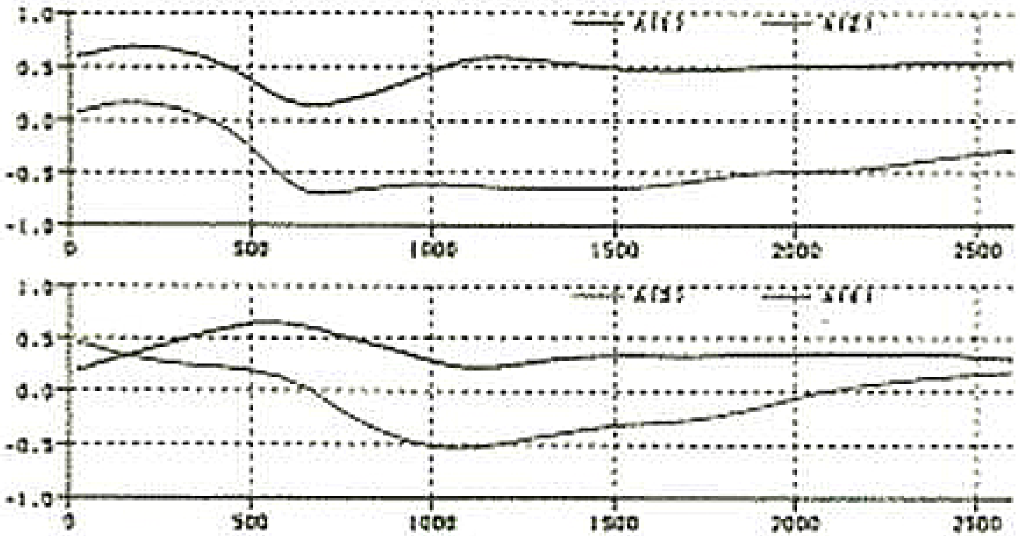


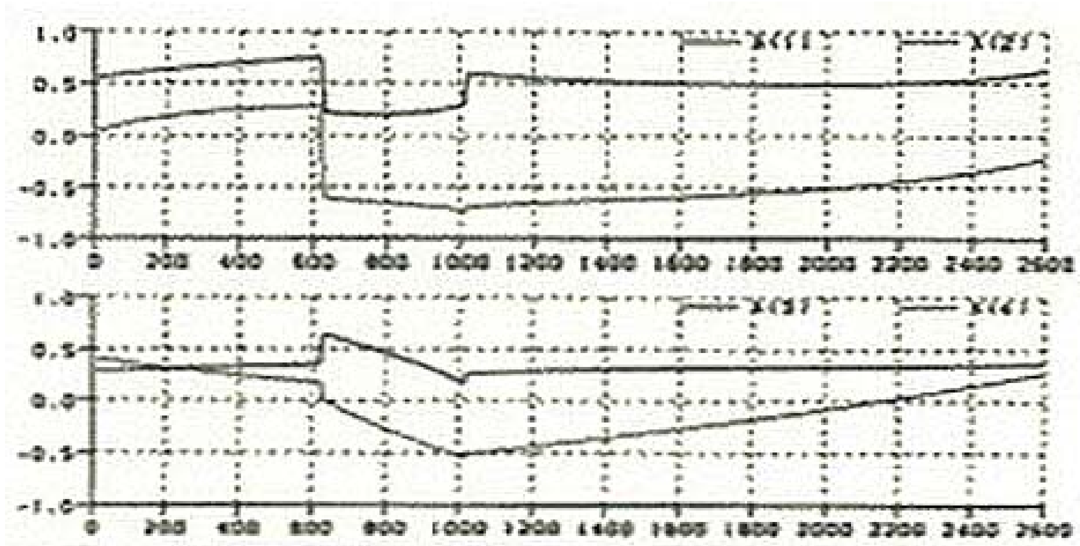
時変係数と時変スペクトル



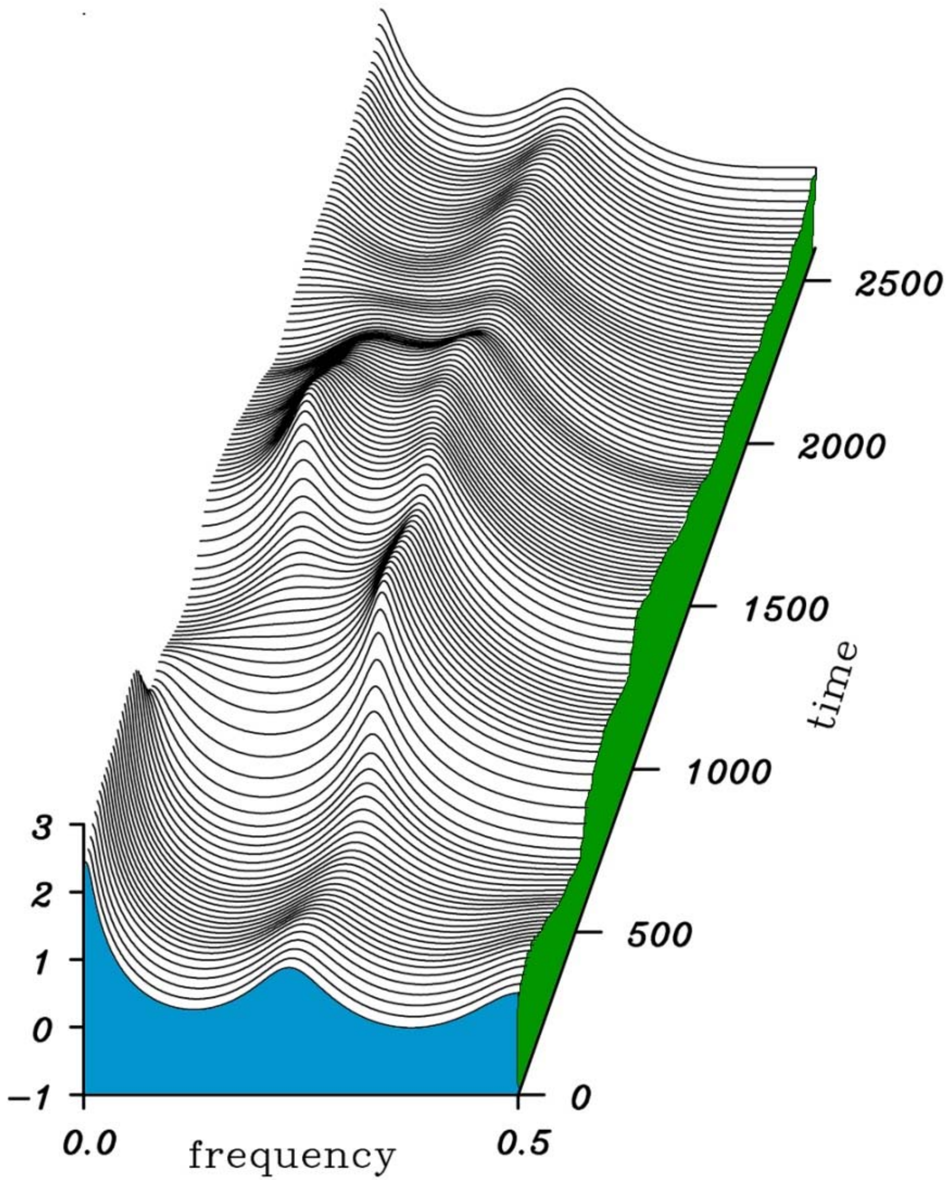
局所定常構造
時変係数AR

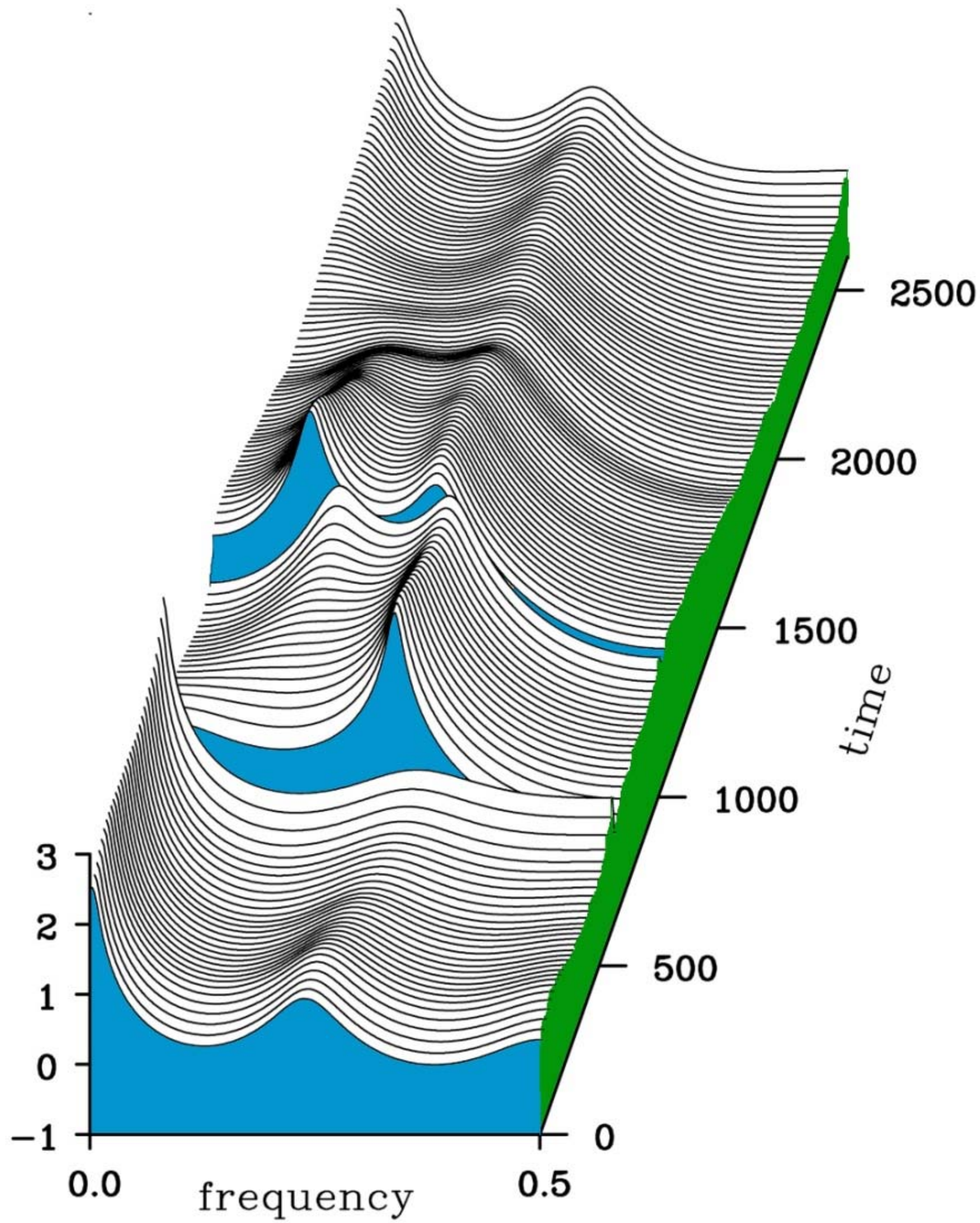
時変係数AR





時変スペクトル


3
2
1
0
−1
0.0
frequency
0.5
0
500
1000
1500
2000
2500
time

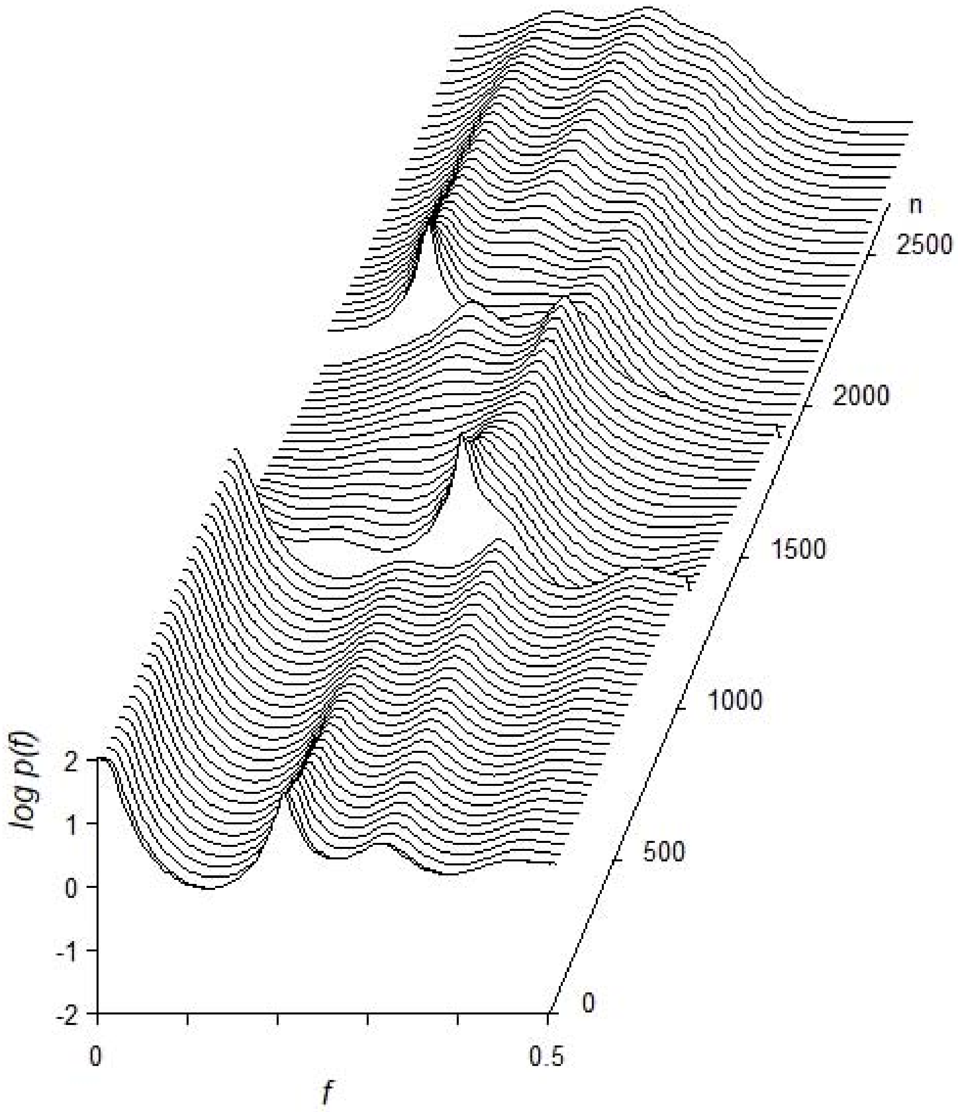

3
2
1
0
−1
0.0
frequency
0.5
0
500
1000
1500
2000
2500
time

本と同様の3次元プロット（未公開）

```
##########################################
#　時変スペクトルの3次元表示
##########################################
# seismic data
data(MYE1F)
z <- tvar(MYE1F, trend.order = 2, ar.order = 8, span =
20,  outlier = c(630, 1026), tau2.ini = 6.6e-06, delta =
1.0e-06)
spec <-
tvspc(z$arcoef, z$sigma2)
#########################################

# 最初のスペクトル(n=0)
nf <- 201
dt <- 2
dy <- 0.2
nf1 <- nf-dt
t <- 1:nf
tt <- 1:nf1
plot(t,spec$z[,1],type="l", xlim=c(1,501),ylim=c(-2,18))
y <- spec$z[,1] z
<- y

# 鳥瞰図(n=1,80)
nrep <- 1:80
for (i in nrep){
par(new=T)
t <- t+dt
  for (j in 1:nf) z[j] <- spec$z[j,i]+dy*(i-1)
  for (j in tt){
#  z[j] <- max(spec$z[j,i]+dy*(i-1),y[j+dt])
  z[j] <- max(z[j],y[j+dt])
  }
y <- z
plot(t,y,type="l", xlim=c(1,501),ylim=c(-
2,18),xaxt='n',yaxt="n")
```



スペクトルの滑らかさの制約

$$R_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\Delta^k A(f,n)}{\partial f^k} \right|^2 df = (2\pi)^{2k} \sum_{j=1}^{m} j^{2k} a_{nj}^2$$

$$a_{jn} = u_{jn}^{(k)}, \qquad u_{jn}^{(k)} \sim N(0, (j^k \lambda_k)^{-2})$$

$$a_{jn} = u_{jn}, \qquad u_{jn} \sim N(0, (\lambda_0^2 + j^4 \lambda_2^2)^{-1})$$

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,n-1} \\ \vdots \\ a_{m,n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{mn} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tau^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \tau^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & y_{n-m} \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_n \\ u_{1n} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} w_n \\ u_{1n} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & (\lambda_0^2 + \lambda_2^2)^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_0^2 + m^4 \lambda_2^2)^{-1} \end{bmatrix} \right)$$

時系列解析（１２）

－非線形・非ガウス型状態空間モデル－

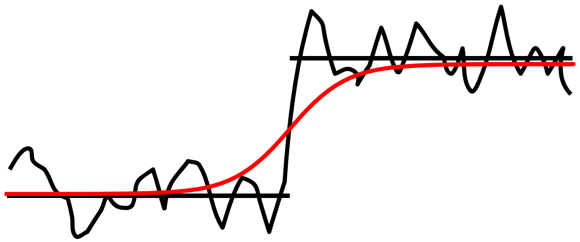
東京大学 数理・情報教育研究センター
北川 源四郎

非線形・非ガウス型フィルタ

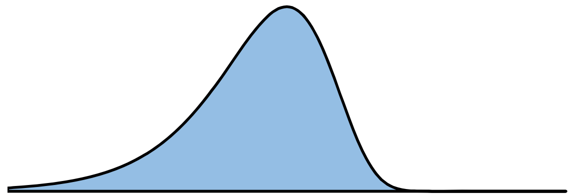
- 拡張カルマンフィルタ
- ガウス和フィルタ
- 非ガウス型フィルタ
- 粒子フィルタ
- アンサンブルカルマンフィルタ

非ガウス型モデリングの必要性

構造変化



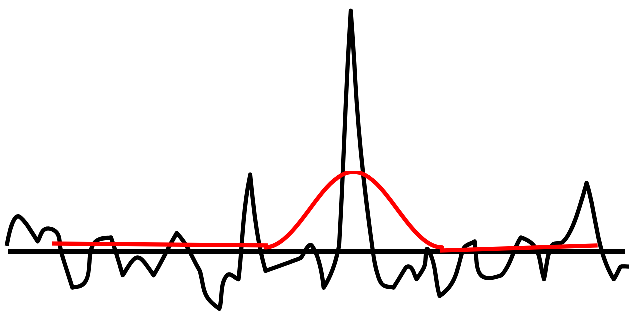
非対称分布



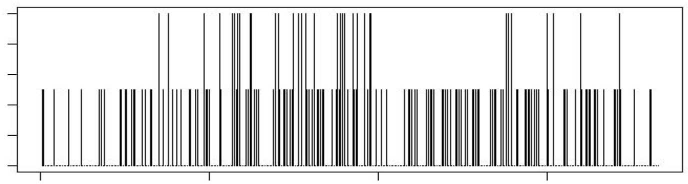
非線形性

$$x_n = f(x_{n-1}) + v_n$$

異常値（外れ値）



離散過程



状態空間モデルの拡張

線形・ガウス型

$$x_n = Fx_{n-1} + Gv_n$$
$$y_n = Hx_n + w_n$$

関数：非線形
分布：非ガウス型

非線形・非ガウス型

$$x_n = f(x_{n-1}, v_n)$$
$$y_n = h(x_n, w_n)$$

非線形・非ガウス型状態空間モデル

$$x_n = f(x_{n-1}, v_n)$$
$$y_n = h(x_n) + w_n$$

x_n: 状態

y_n : 時系列

v_n: システムノイズ $\qquad v_n \sim q(v)$

w_n : 観測ノイズ $\qquad w_n \sim r(w)$

観測モデルの拡張

$$y_n = h(x_n, w_n)$$

ただし，$h(x,w)$ の逆関数 $g(y,x)$ が存在して

- $w_n = g(y_n, x_n)$
- y で微分可能（$\partial g/\partial y$が存在 ）

（例）

$$y_n = e^{x_n} w_n$$

$$w_n = e^{-x_n} y_n$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = e^{-x_n}$$

- ボラティリティのモデリングなどで必要

非線形・非ガウス型状態空間モデル

非線形関数の例

$$x_n = f(x_{n-1}, v_n)$$
$$y_n = h(x_n, w_n)$$

$f(x)$　　非線形変換

$f(x,v)$　　積型

$h(x,w)$　　積型（$e^x w$など）

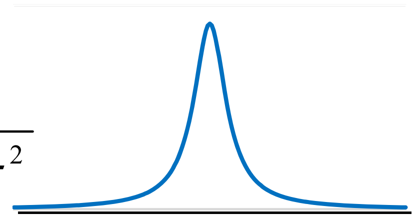
$y=h(x,w)$から$w=k(y,x)$と書ける必要がある。

$h(x)+w$の方が簡単

非ガウス型分布の例

・コーシー分布

$$p(x) = \frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{(x-\mu)^2+\sigma^2}$$



・ピアソン分布族

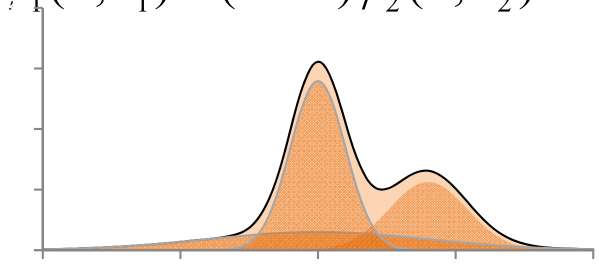
$$p(x) = C\left((x-\mu)^2+\sigma^2\right)^{-b}$$

$$C = \frac{\tau^{2b-1}\Gamma(b)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b-\frac{1}{2}\right)}$$

・二重指数分布

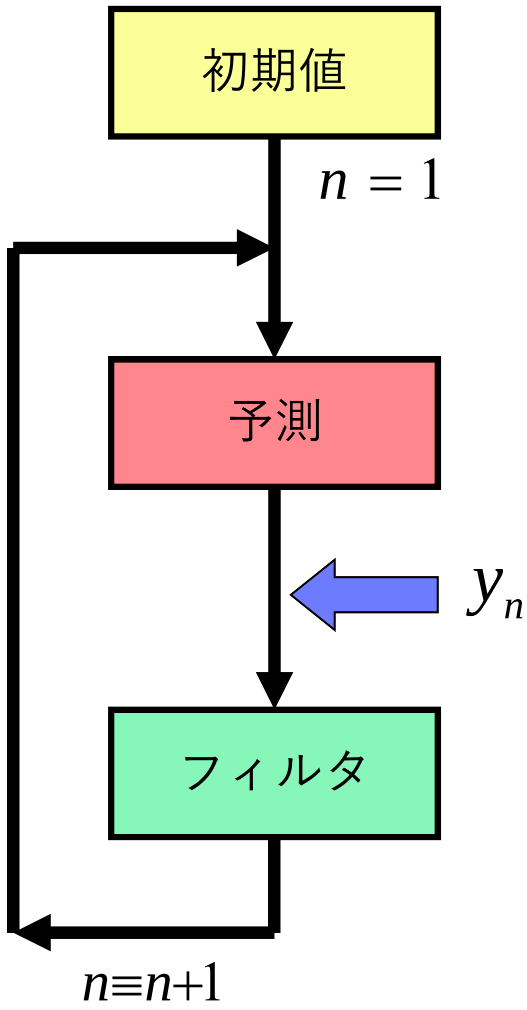
・混合分布

$$p(x) = \alpha\varphi_1(x,\theta_1) + (1-\alpha)\varphi_2(x,\theta_2)$$



状態推定

	カルマンフィルタ	非線形
予測	$x_{n\|n-1}, V_{n\|n-1}$	$p(x_n \| Y_{n-1})$
フィルタ	$x_{n\|n}, V_{n\|n}$	$p(x_n \| Y_n)$



非ガウス型予測の導出

$$p(x_n | Y_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n, x_{n-1} | Y_{n-1}) dx_{n-1}$$

$$\boxed{p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy}$$

$$\begin{aligned} &p(x_n, x_{n-1} | Y_{n-1}) \\ &\quad = p(x_n | x_{n-1}, Y_{n-1}) p(x_{n-1} | Y_{n-1}) \\ &\quad = p(x_n | x_{n-1}) p(x_{n-1} | Y_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\boxed{p(x, y) = p(y) p(x | y)}$$

$$\boxed{p(x_n | x_{n-1}, Y_{n-1}) = p(x_n | x_{n-1})}$$

$$\boxed{p(x_n | Y_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n | x_{n-1}) p(x_{n-1} | Y_{n-1}) dx_{n-1}}$$

非ガウス型フィルタの導出

$$p(x_n \mid Y_n) = p(x_n \mid Y_{n-1}, y_n)$$

$$= \frac{p(y_n, x_n \mid Y_{n-1})}{p(y_n \mid Y_{n-1})}$$

$$= \frac{p(y_n \mid x_n, Y_{n-1})\, p(x_n \mid Y_{n-1})}{p(y_n \mid Y_{n-1})}$$

$$= \frac{p(y_n \mid x_n)\, p(x_n \mid Y_{n-1})}{p(y_n \mid Y_{n-1})}$$

$$Y_n = \{y_1, \cdots, y_n\} = \{Y_{n-1}, y_n\}$$

$$\boxed{p(x \mid y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} = \frac{p(y \mid x)\, p(x)}{p(y)}}$$

$$\boxed{p(y_n \mid x_n, Y_{n-1}) = p(y_n \mid x_n)}$$

$$\boxed{p(x_n \mid Y_n) = \frac{p(y_n \mid x_n)\, p(x_n \mid Y_{n-1})}{p(y_n \mid Y_{n-1})}}$$

非ガウス型平滑化の導出

$$p(x_n, x_{n+1} | Y_N) = p(x_{n+1} | Y_N) p(x_n | x_{n+1}, Y_N)$$

$$= p(x_{n+1} | Y_N) p(x_n | x_{n+1}, Y_n)$$

$$= p(x_{n+1} | Y_N) \frac{p(x_{n+1}, x_n | Y_n)}{p(x_{n+1} | Y_n)}$$

$$= p(x_{n+1} | Y_N) \frac{p(x_{n+1} | x_n, Y_n) p(x_n | Y_n)}{p(x_{n+1} | Y_n)}$$

$$= p(x_{n+1} | Y_N) \frac{p(x_{n+1} | x_n) p(x_n | Y_n)}{p(x_{n+1} | Y_n)}$$

$$\boxed{p(x, y) = p(y) p(x | y)}$$

$$\boxed{p(x_n | x_{n+1}, Y_N) = p(x_n | x_{n+1}, Y_n)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p(x | z) &= \frac{p(z, x)}{p(z)} \\ &= \frac{p(z | x) p(x)}{p(z)} \end{aligned}}$$

$$\boxed{p(x_{n+1} | x_n, Y_n) = p(x_{n+1} | x_n)}$$

$$p(x_n | Y_N) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n, x_{n+1} | Y_N) dx_{n+1}$$

$$= p(x_n | Y_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x_{n+1} | x_n) p(x_{n+1} | Y_N)}{p(x_{n+1} | Y_n)} dx_{n+1}$$

非ガウス型フィルタ・平滑化

一期先予測

$$p(x_n|Y_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n|x_{n-1})p(x_{n-1}|Y_{n-1})dx_{n-1}$$

フィルタ

$$p(x_n|Y_n) = \frac{p(y_n|x_n)p(x_n|Y_{n-1})}{p(y_n|Y_{n-1})}$$

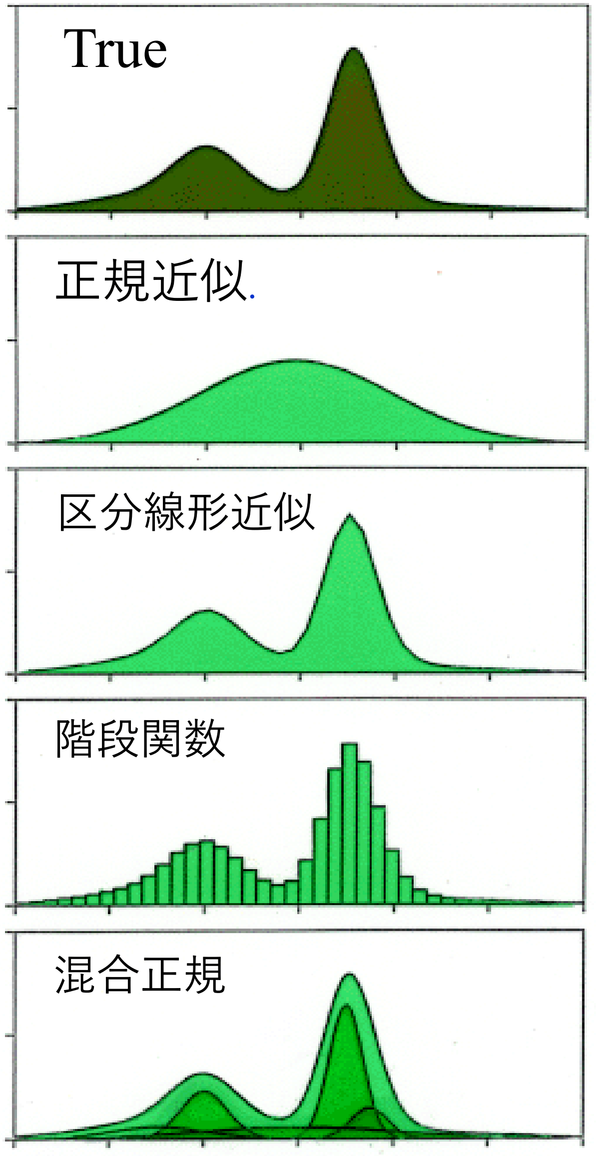
平滑化

$$p(x_n|Y_N) = p(x_n|Y_n)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x_{n+1}|x_n)p(x_{n+1}|Y_N)}{p(x_{n+1}|Y_n)}dx_{n+1}$$

Kitagawa(1987)

分布の近似

0. 線形・正規モデル近似
   カルマンフィルタ・平滑化
1. 正規分布近似
   拡張カルマンフィルタ・平滑化
2. 区分線形（階段）近似
   非ガウス型フィルタ・平滑化
3. 混合正規分布近似
   ガウス和フィルタ・平滑化



拡張カルマンフィルタ

予 測

$$x_{n|n-1} = f_n(x_{n-1|n-1})$$

$$V_{n|n-1} = F_n V_{n-1|n-1} F_n^T + G_n Q_n G_n^T$$

フィルタ

$$K_n = V_{n|n-1} H_n^T (H_n V_{n|n-1} H_n^T + R_n)^{-1}$$

$$x_{n|n} = x_{n|n-1} + K_n (y_n - h_n(x_{n|n-1}))$$

$$V_{n|n} = (I - K_n H_n) V_{n|n-1}$$

$$F_n = \left[\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right]_{x_n = x_{n|n}}$$

$$G_n = \left[\frac{\partial g_n}{\partial x_n} \right]_{x_n = x_{n|n}}$$

$$H_n = \left[\frac{\partial h_n}{\partial x_n} \right]_{x_n = x_{n|n-1}}$$

密度関数の数値近似

密度関数	近似	記号
$p(x_n \mid Y_{n\text{-}1})$	$\{d;t_0,\ldots,t_d;p_1,\ldots,p_d\}$	$p(t)$
$p(x_n \mid Y_n)$	$\{d;t_0,\ldots,t_d;f_1,\ldots,f_d\}$	$f(t)$
$p(x_n \mid Y_N)$	$\{d;t_0,\ldots,t_d;s_1,\ldots,s_d\}$	$s(t)$
$q(v_n)$	$\{2d+1;t_{-d},\ldots,t_d;q_{-\mathrm{d}},\ldots,p_d\}$	$q(t)$

数値積分による実現

1次トレンドモデルの場合

$$t_n = t_{n-1} + v_n$$

$$y_n = t_n + w_n$$

一期先予測

$$p_i = p(t_i) = \int_{t_0}^{t_d} q(t_i - s) f(s) ds$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \int_{t_{j-1}}^{t_j} q(t_i - s) f(s) ds$$

$$= \Delta t \sum_{j=1}^{d} q_{i-j} f_j$$

（数値積分：畳み込み積分）

フィルタ

$$f_i = f(t_i) = \frac{r(y_n - t_i) p(t_i)}{C}$$

$$= \frac{r(y_n - t_i) p_i}{C}$$

$$C = \int_{t_0}^{t_d} r(y_n - t) p(t) dt$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \int_{t_{j-1}}^{t_j} r(y_n - t) p(t) dt$$

$$= \Delta t \sum_{j=1}^{d} r(y_n - t) p_j$$

各ステップの後で密度関数の全積分が１になるように規格化する

数値積分による実現(平滑化)

平滑化

$$
\begin{aligned}
s_i = s(t_i) &= f(t_i)\int_{t_0}^{t_d} \frac{q(t_i - u)s(u)}{p(u)}du \\
&= f(t_i)\sum_{j=1}^{d}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{q(t_i - u)s(u)}{p(u)}du \\
&= \Delta t \cdot f(t_i)\sum_{j=1}^{d} \frac{q_{i-j}s_j}{p_j}
\end{aligned}
$$

各ステップの後で密度関数の全積分が１になるように規格化する