時系列解析（5）

－追加配布用（多変量ARモデルの応用）－

東京大学 数理・情報教育研究センター
北川 源四郎

多変量自己回帰モデル（MAR, VAR Model）

$y_n = (y_n(1), \ldots, y_n(\ell))^T$　　　ℓ 変量時系列

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} A_j y_{n-j} + v_n \qquad A_j = \begin{bmatrix} a_j(1,1) & \cdots & a_j(1,\ell) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_j(\ell,1) & \cdots & a_j(\ell,\ell) \end{bmatrix}$$

v_n : ℓ 変量正規白色雑音

$$E[v_n] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad E[v_n v_n^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\ell 1} & \cdots & \sigma_{\ell\ell} \end{bmatrix} = W \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$E[v_n v_m^T] = O \qquad n \neq m$$

$$E[v_n y_m^T] = O \qquad n > m$$

v_nは自分自身と独立（白色）

v_nは y_n の過去と独立

相互共分散関数

$$C_k(i,j) = E[y_n(i) y_{n-k}(j)]$$

$$C_k = E[y_n y_{n-k}^T]$$

$$C_k = \begin{bmatrix} C_k(1,1) & \cdots & C_k(1,\ell) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_k(\ell,1) & \cdots & C_k(\ell,\ell) \end{bmatrix}$$

多変量ARモデル

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} A_j y_{n-j} + v_n$$

$$A_k = \begin{bmatrix} a_k(1,1) & \cdots & a_k(1,\ell) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k(\ell,1) & \cdots & a_k(\ell,\ell) \end{bmatrix}$$

Yule-Walker方程式

$$C_0 = \sum_{j=1}^{m} A_j C_{-j} + W$$

$$C_k = \sum_{j=1}^{m} A_j C_{k-j} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

クロススペクトル

$$p_{sj}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(s,j) e^{-2\pi i k f}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(s,j)\cos 2\pi i k f - i \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(s,j)\sin 2\pi i k f$$

$$P(f) = \begin{bmatrix} p_{11}(f) & \dots & p_{1m}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}(f) & \dots & p_{mm}(f) \end{bmatrix}$$

$$P(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-2\pi i k f}$$

$$C_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P(f) e^{2\pi i k f} df$$

y_n が多変量ARモデルに従うとき

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} A_j y_{n-j} + v_n, \quad v_n \sim N(0, W)$$

$$P(f) = A(f)^{-1} W (A(f)^{-1})^*$$

$$A(f) = \begin{bmatrix} A_{11}(f) & \dots & A_{1m}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}(f) & \dots & A_{mm}(f) \end{bmatrix}$$

$$A_{jk}(f) = \sum_{j=0}^{m} a_j(j,k) e^{-2\pi i j f}, \qquad a_0 = -I$$

クロススペクトル

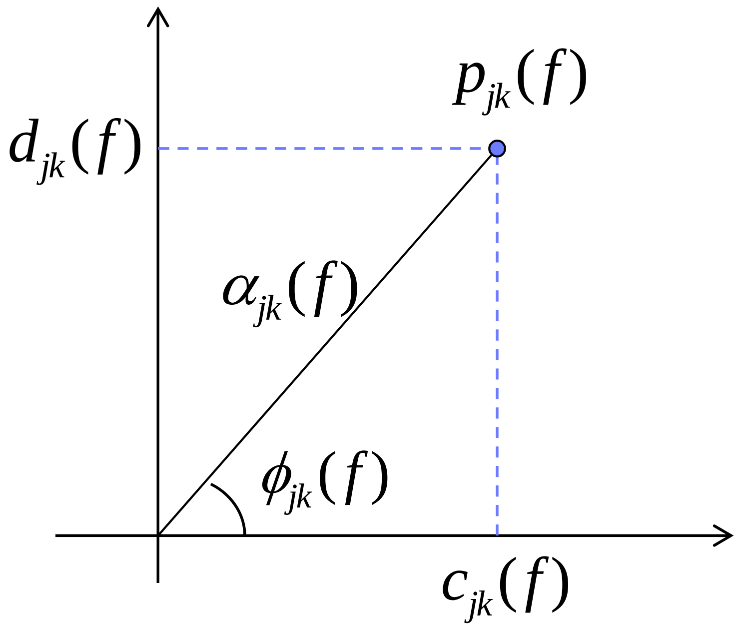
$$p_{jk}(f) = c_{jk}(f) + i d_{jk}(f)$$

$$\alpha_{jk}(f) = \sqrt{c_{jk}(f)^2 + d_{jk}(f)^2}$$

$$\phi_{jk}(f) = \arctan d_{jk}(f) / c_{jk}(f)$$

$$p_{jk}(f) = \alpha_{jk}(f) e^{i\phi_{jk}(f)}$$

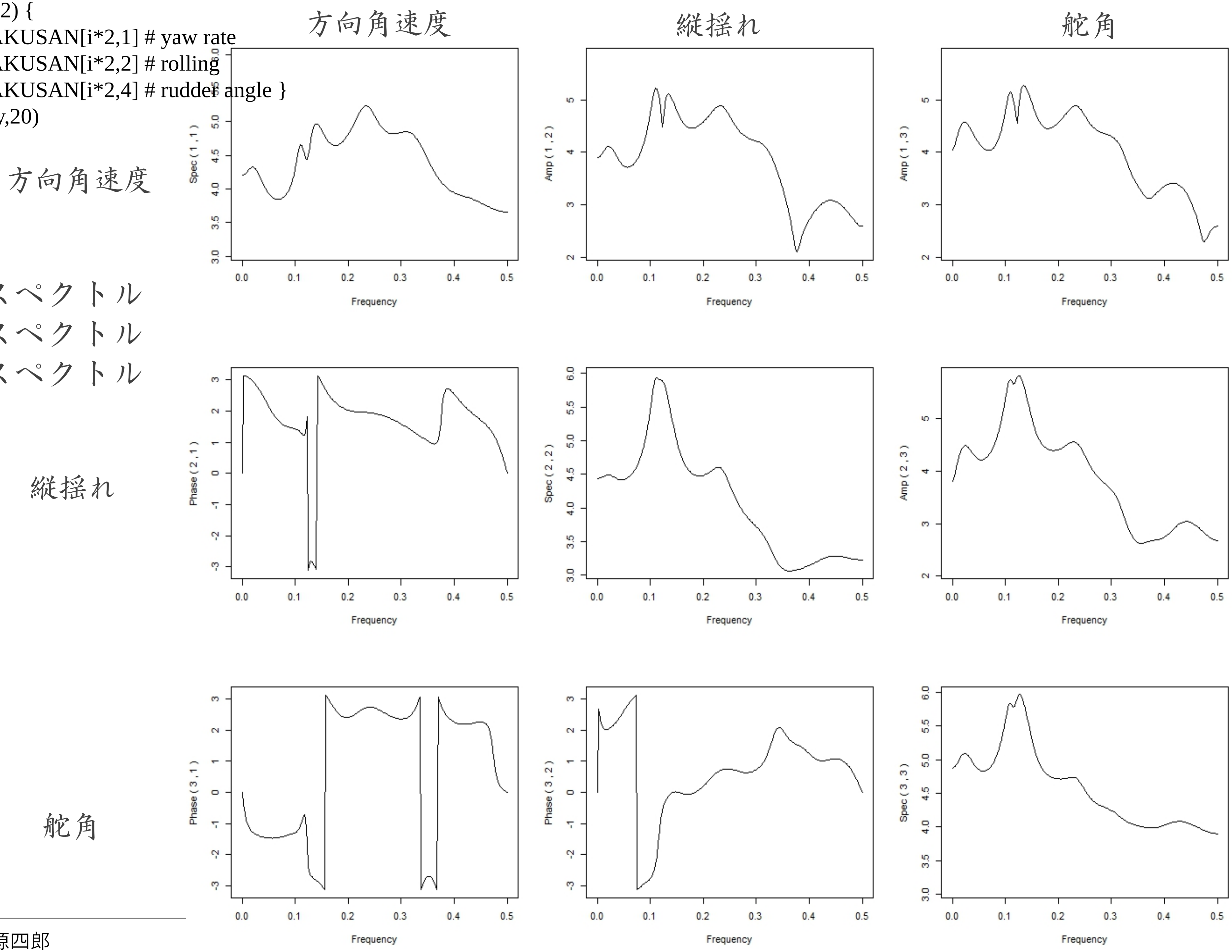
$$coh_{jk}(f) = \frac{\alpha_{jk}(f)^2}{p_{jj}(f) p_{kk}(f)}$$



クロススペクトル

```
data(HAKUSAN) # Yaw rate, rolling, pitching and rudder angle for the ship on the open sea
length <- dim(HAKUSAN)[1]
y <- matrix(, length/2, 3)
for( i in 1:length/2) {
        y[i,1] <- HAKUSAN[i*2,1] # yaw rate
        y[i,2] <- HAKUSAN[i*2,2] # rolling
        y[i,3] <- HAKUSAN[i*2,4] # rudder angle }
        z <- marfit(y,20)
```

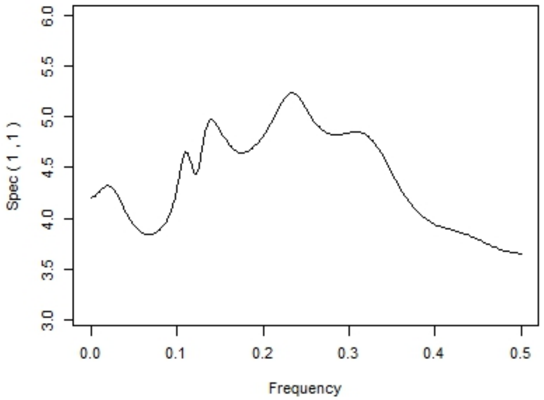
対角線：スペクトル
上：振幅スペクトル
下：位相スペクトル

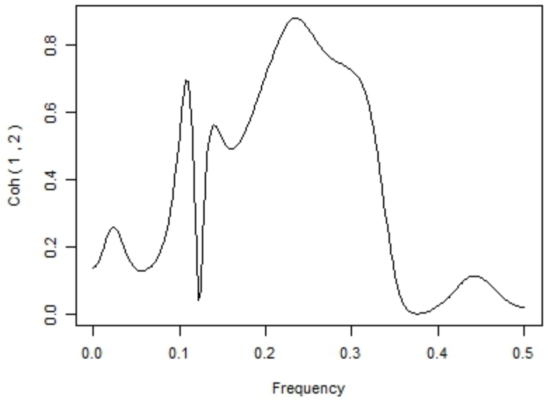


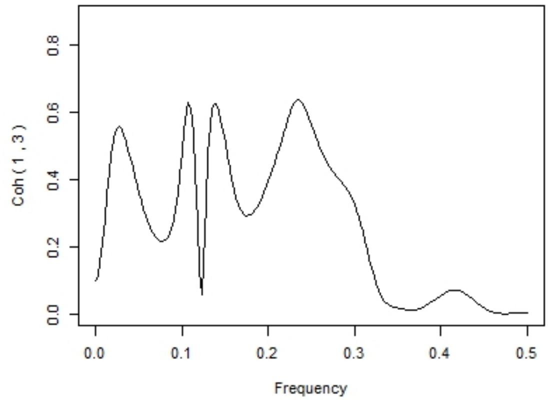
パワースペクトルとコヒーレンシー

	方向角速度	縦揺れ	舵角

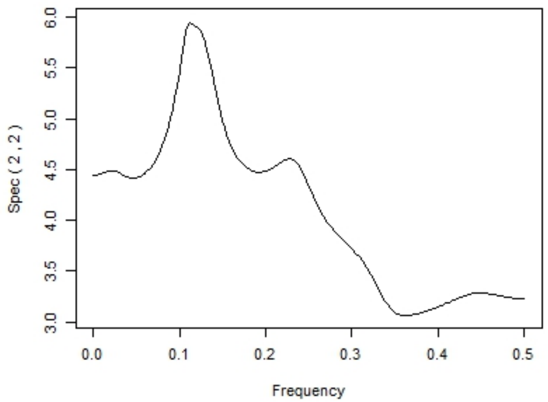
方向角速度

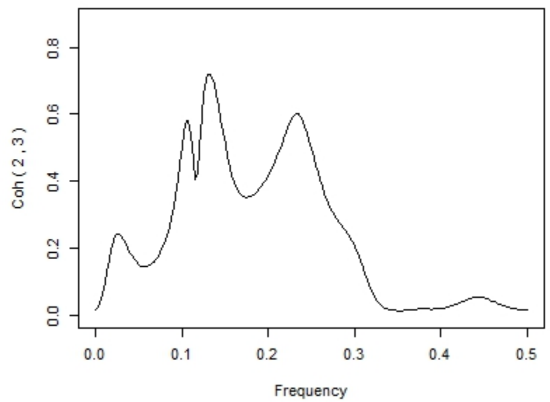






縦揺れ

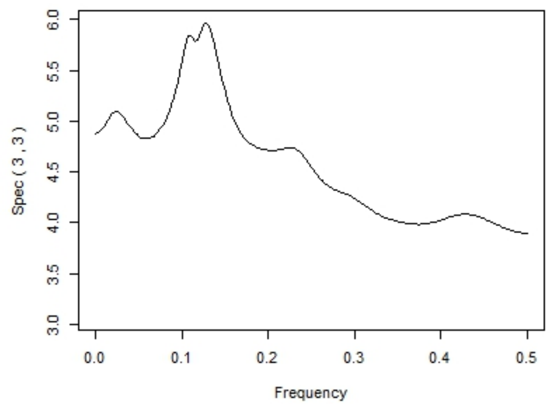




対角線：パワースペクトル

上：　　　コヒーレンシー

舵角



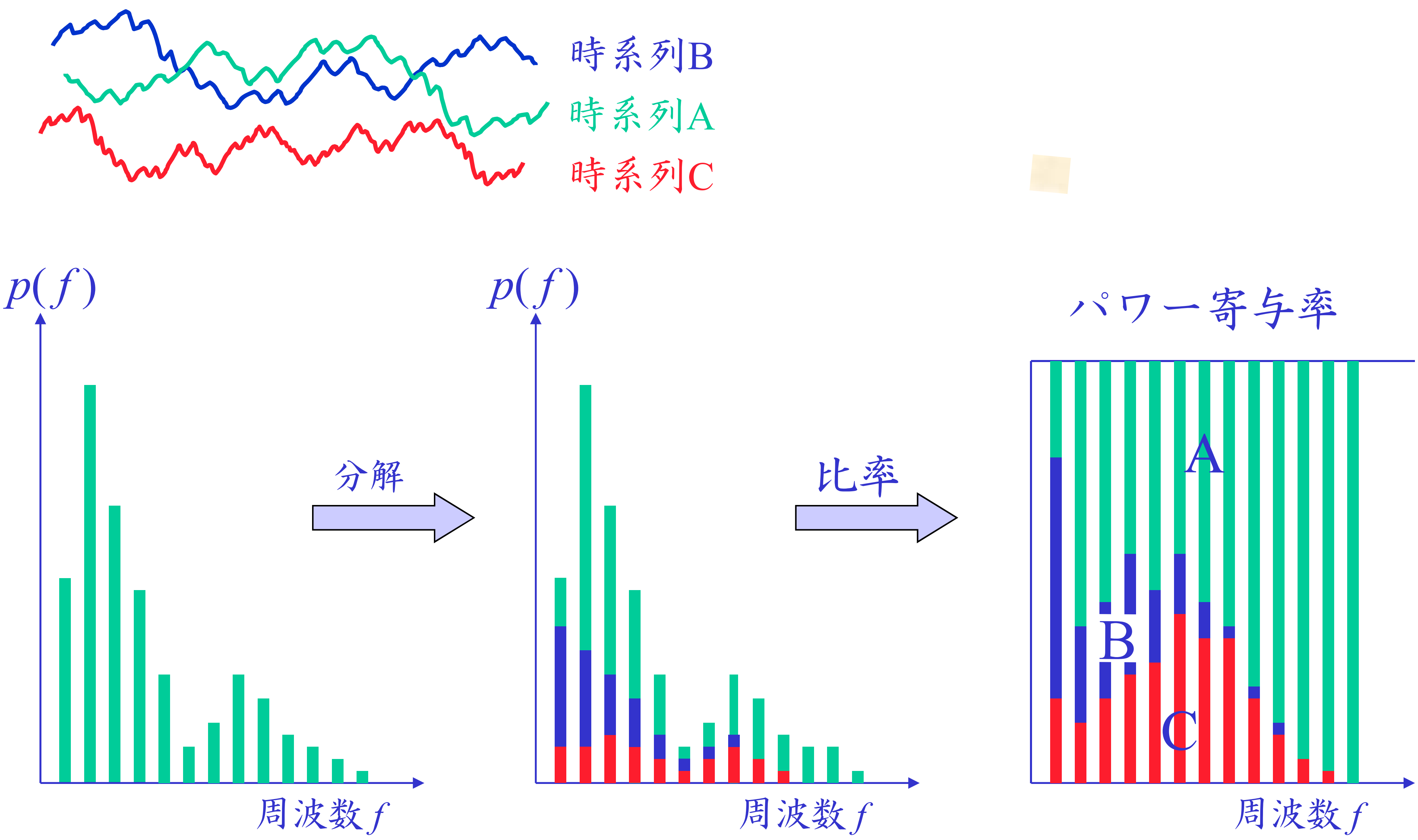
パワー寄与率

$$p_{ii}(f) = \sum_{j=1}^{\ell} b_{ij}(f)\sigma_j^2 b_{ij}(f)^* \equiv \sum_{j=1}^{\ell} | b_{ij}(f) |^2 \sigma_j^2$$

$$r_{ij}(f) = \frac{| b_{ij}(f) |^2 \sigma_j^2}{p_{ii}(f)}$$

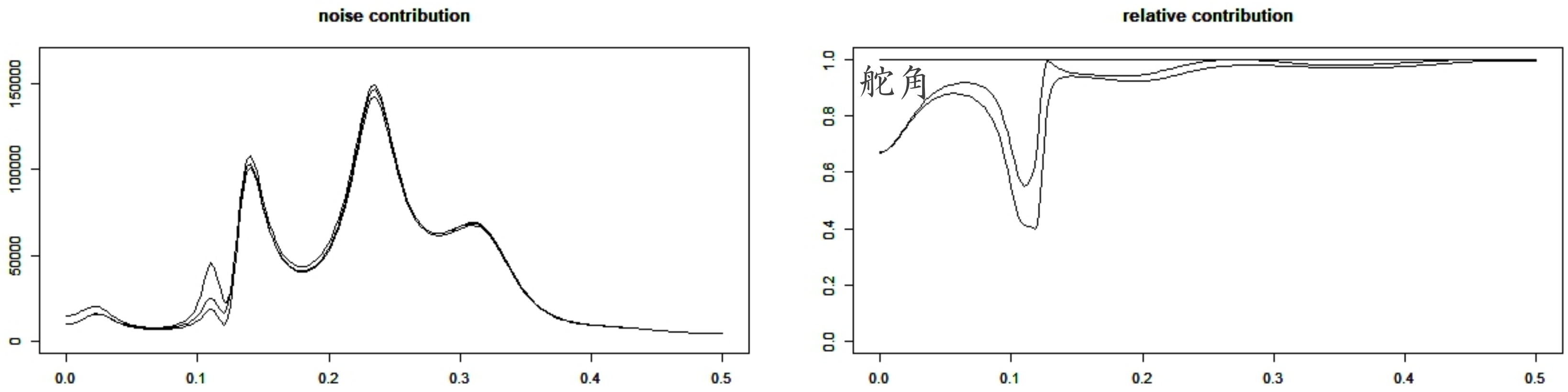
$$s_{ij}(f) = \sum_{k=1}^{j} r_{ik}(f) = \frac{\sum_{k=1}^{j} | b_{ik}(f) |^2 \sigma_k^2}{p_{ii}(f)}$$

パワー寄与率

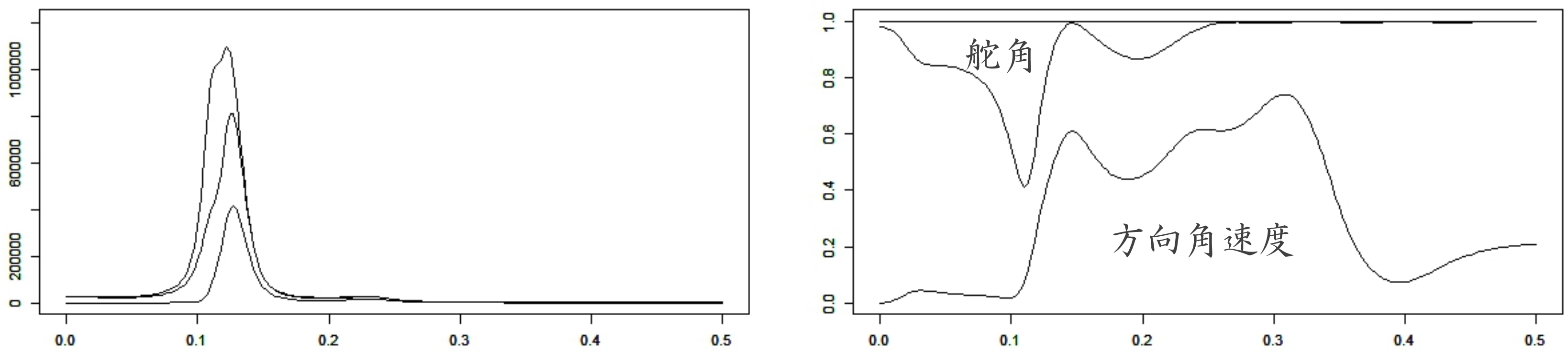


パワー寄与率

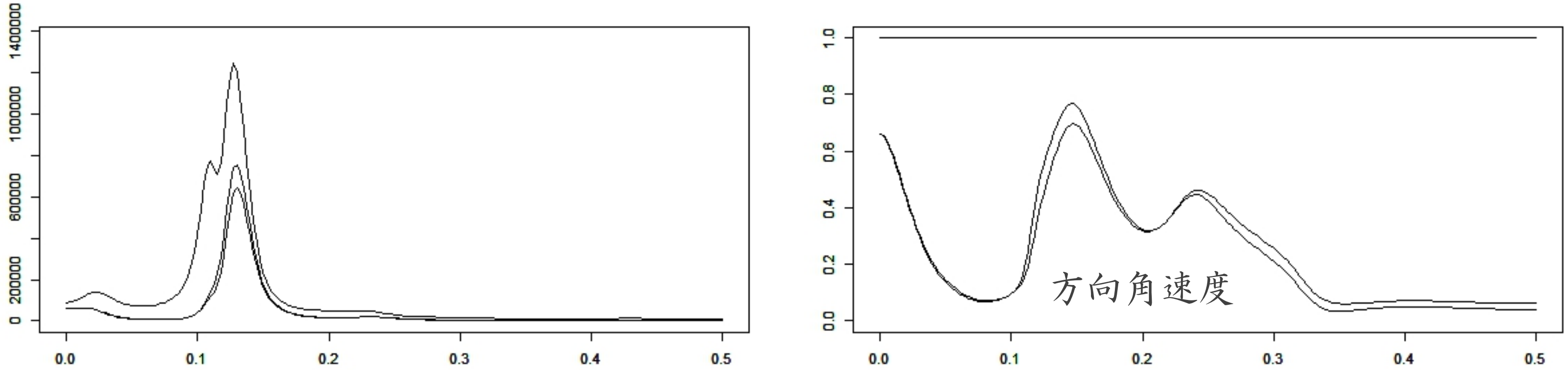
方向角速度



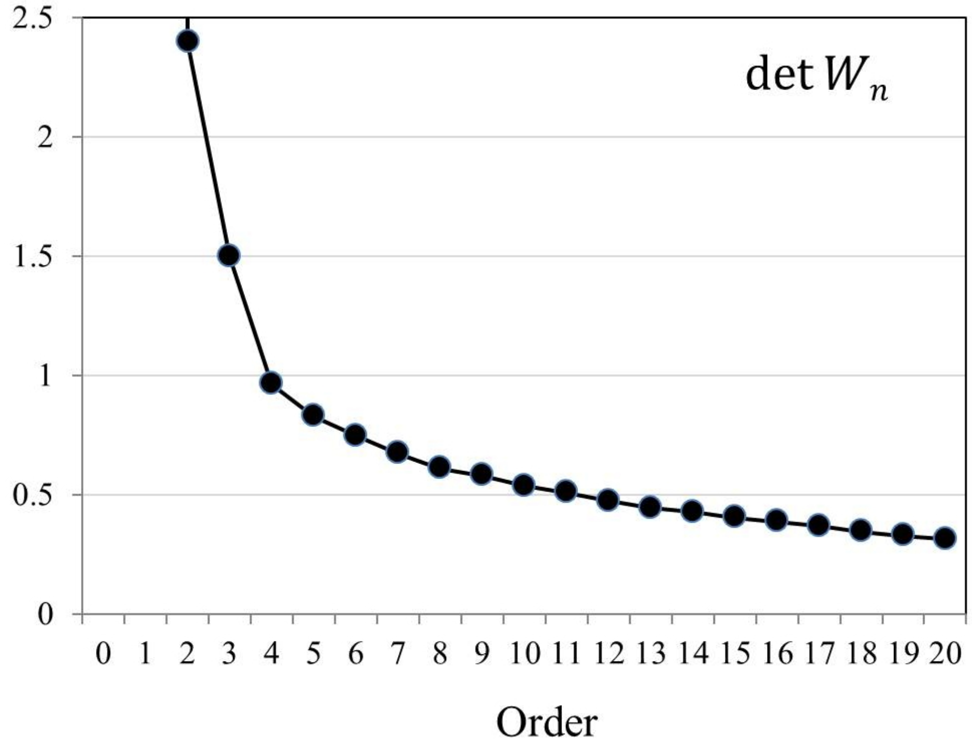
縦揺れ

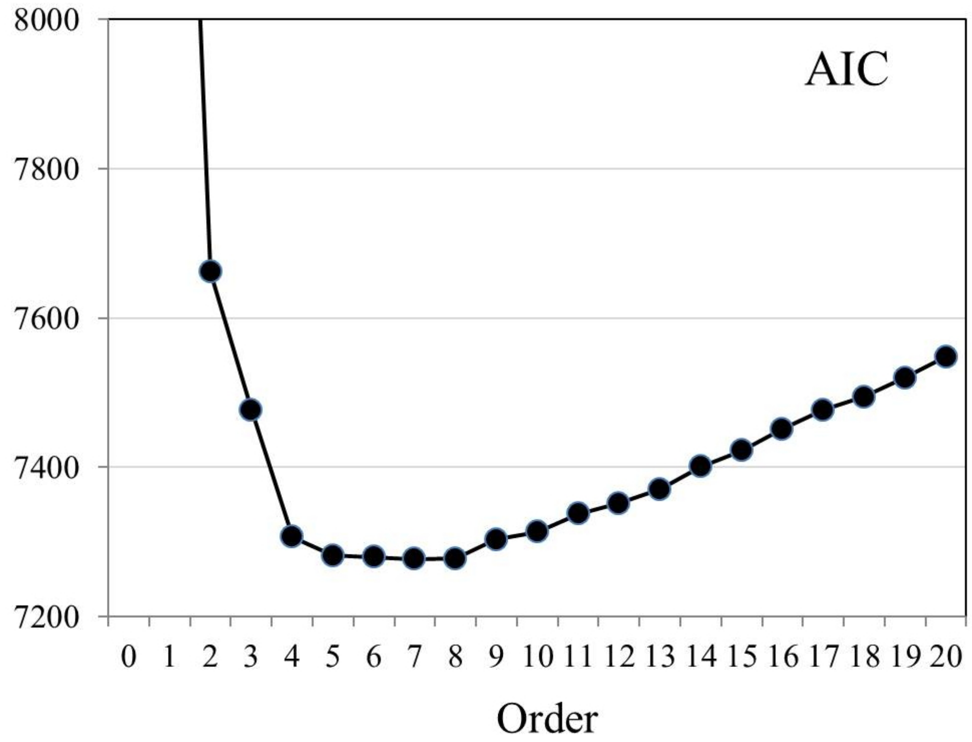


舵角



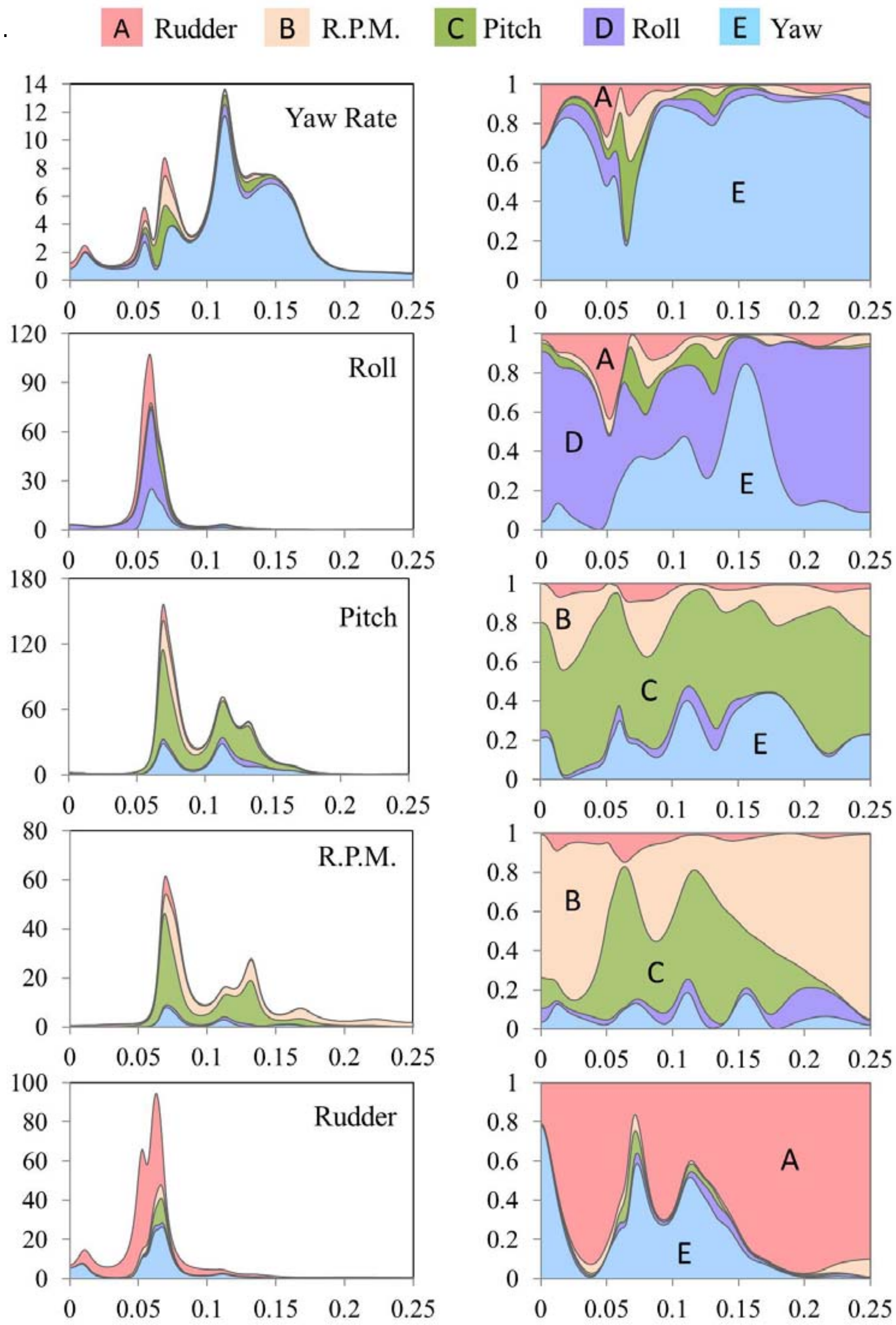
船体運動データ



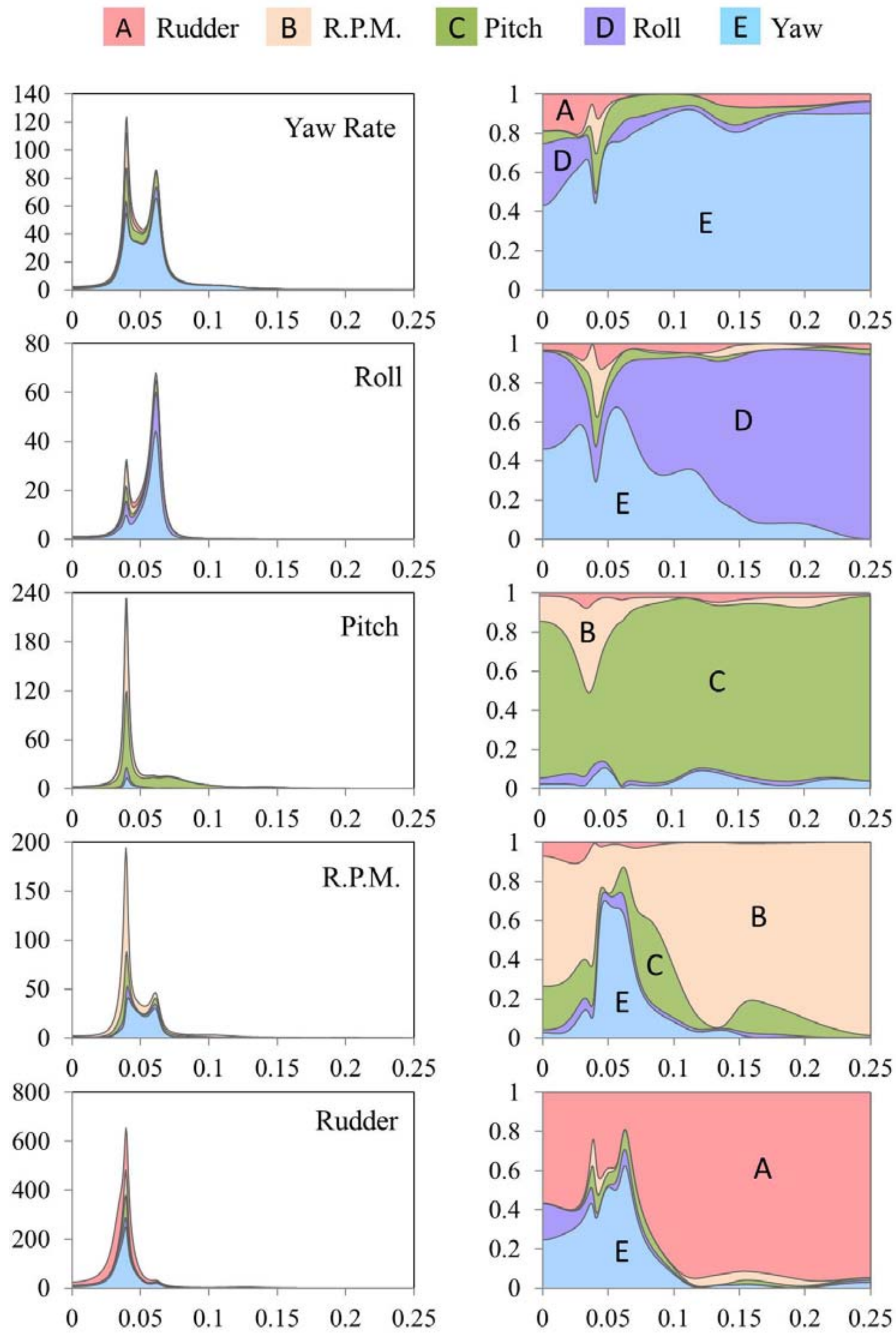


5変量（yaw rate, roll, pitch,rpm,rudder)

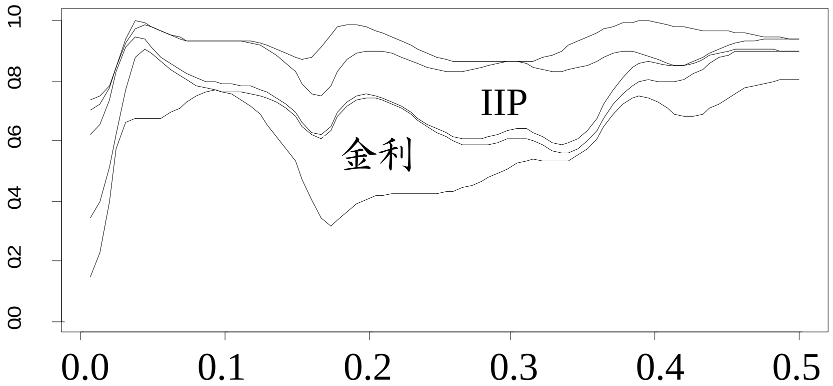
Autopilot Control



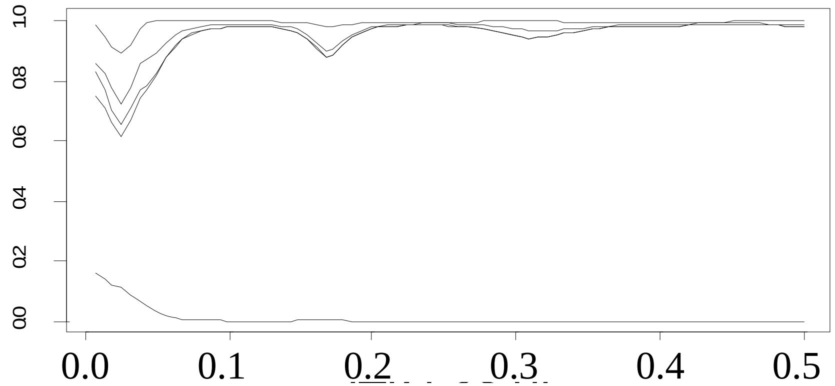
Manual Control



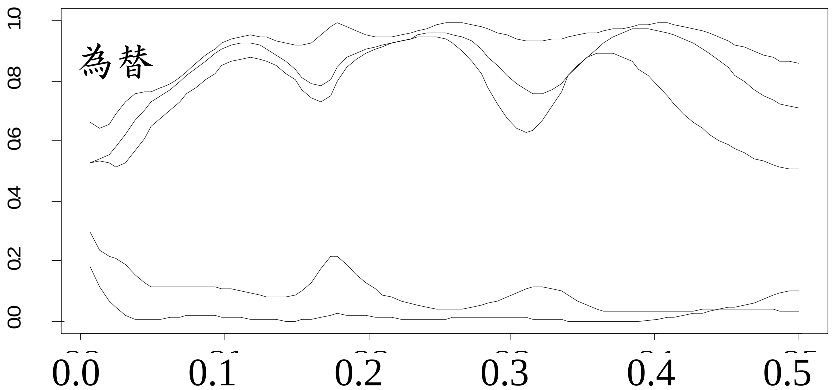
パワー寄与率



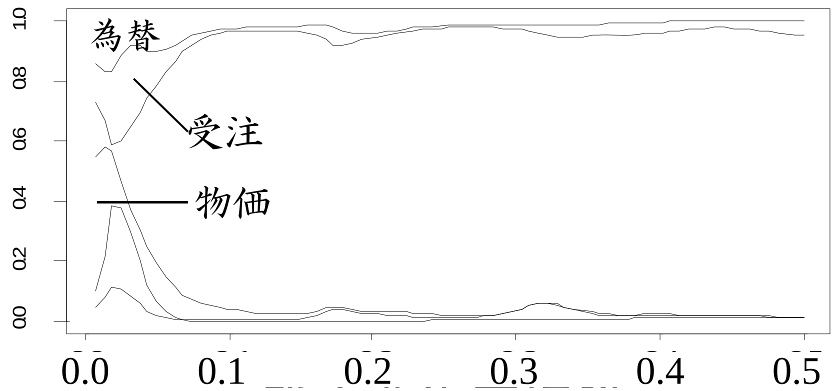
マネタリーベース



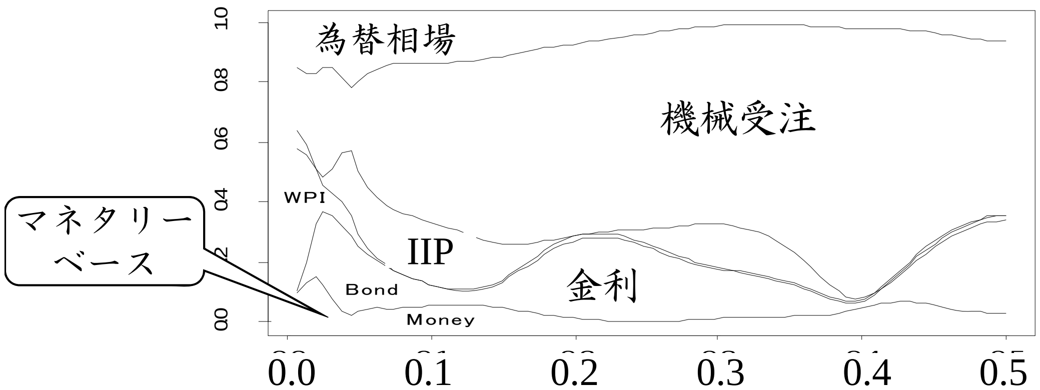
国債金利



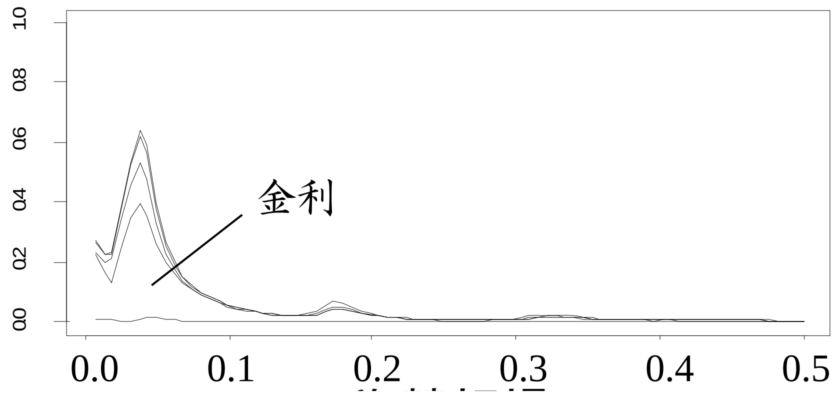
卸売物価



鉱工業生産指数



機械受注



為替相場