

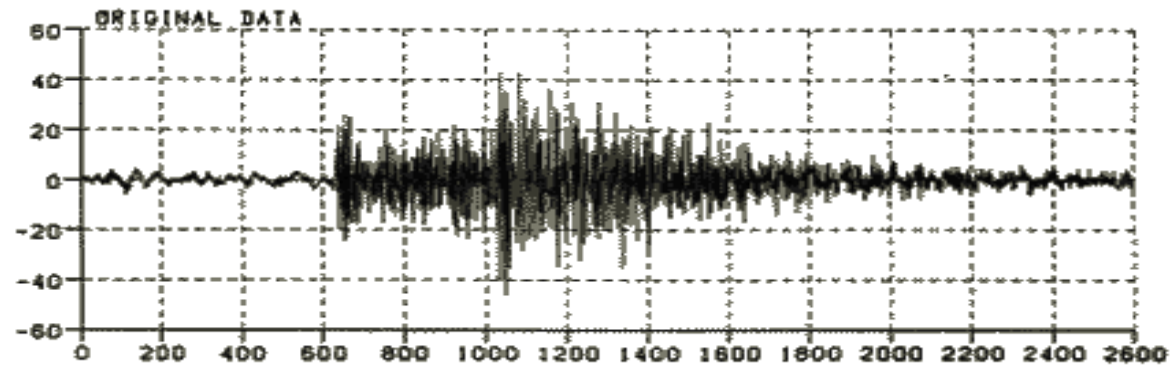
時系列解析（1 1）

ー ボラティリティ、時変係数ARモデルー
配布用

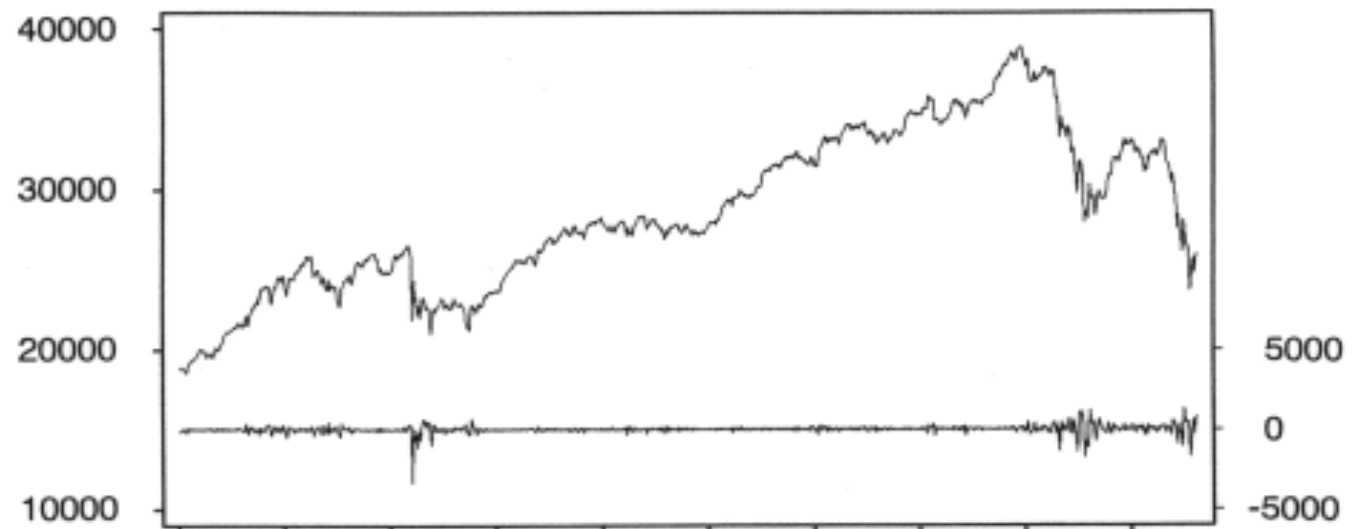
東京大学 数理・情報教育研究センター
北川 源四郎

分散・共分散非定常

Earthquake



Nikkei 225



(線形モデルによる) 時変分散の推定

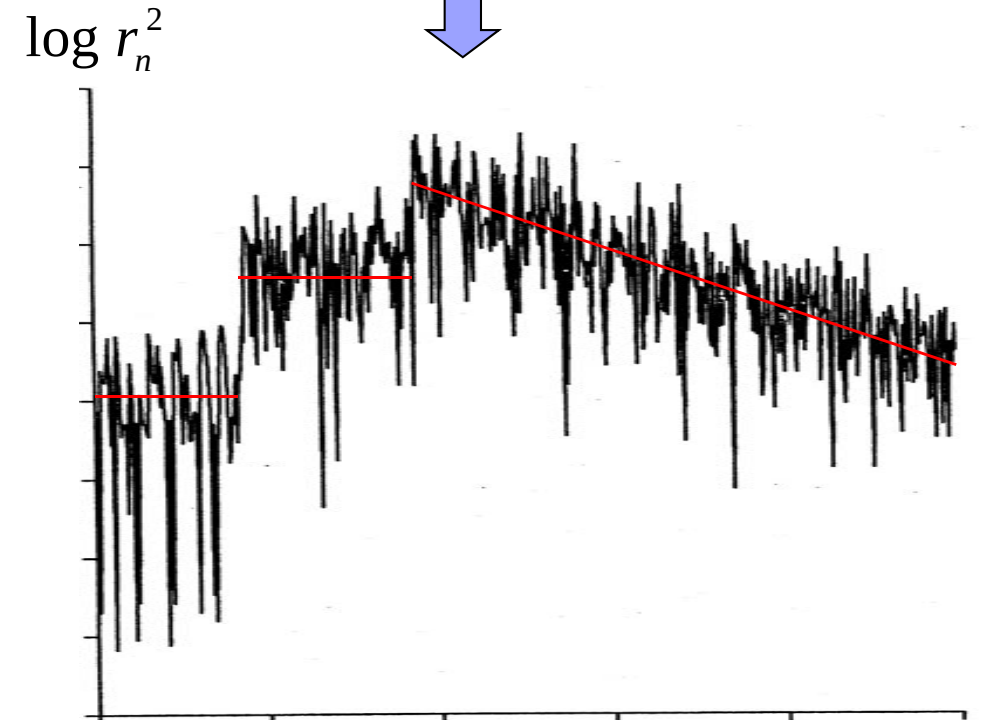
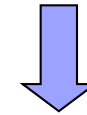
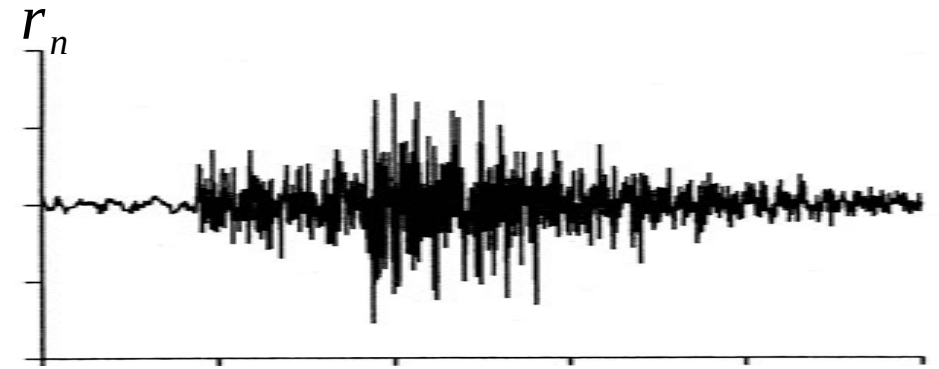
$$r_n = \sigma_n w_n, \quad w_n \sim N(0,1)$$

二乗

$$r_n^2 = \sigma_n^2 w_n^2$$

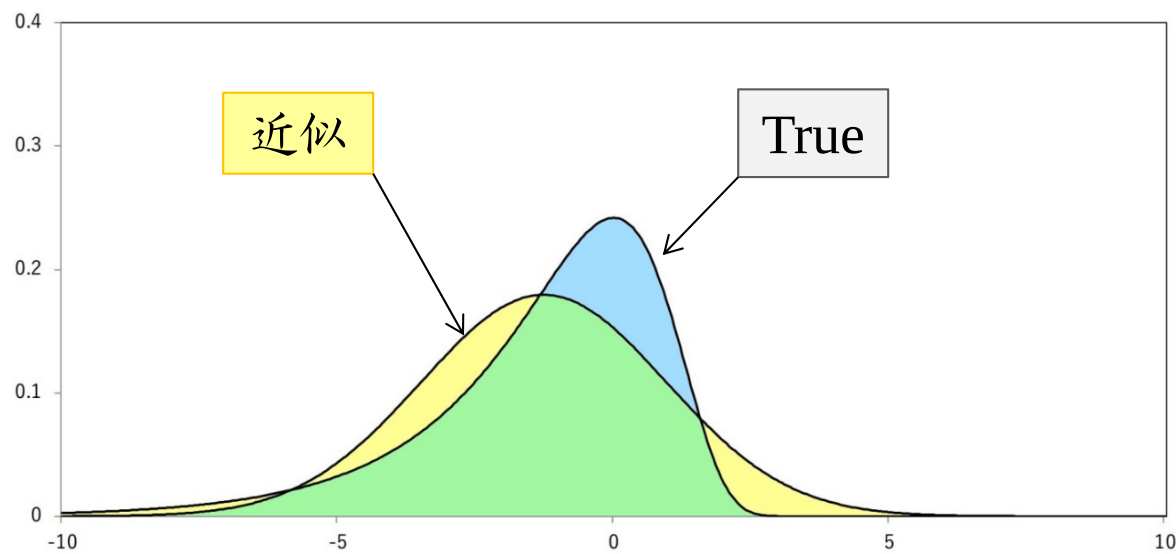
対数

$$\log r_n^2 = \log \sigma_n^2 + \log w_n^2$$



- 変換により分散変動の推定問題は **トレンド推定に変換される**
- ただし, ノイズは正規分布ではない

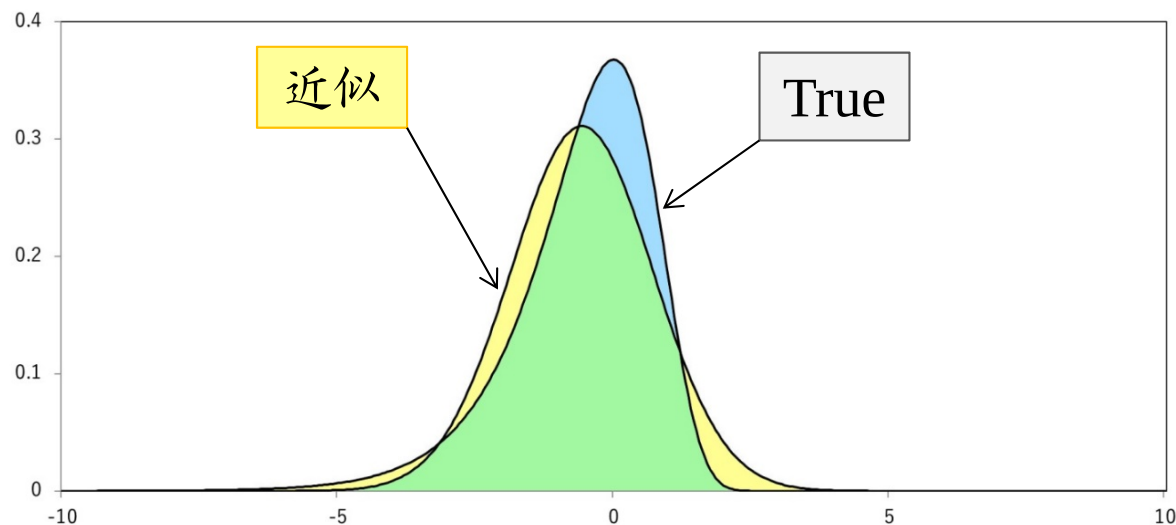
二重指数分布と正規近似



$$\log(y_n^2)$$

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{w - e^w}{2} \right\}$$

$$\log \chi_2^2$$



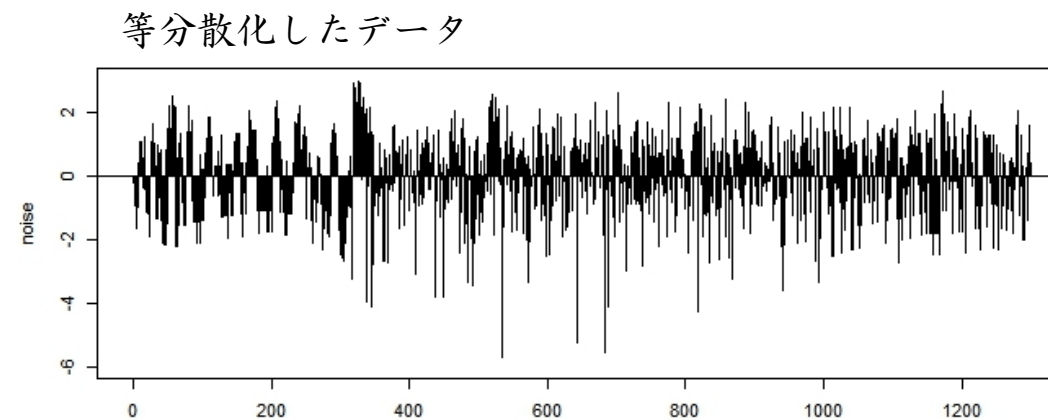
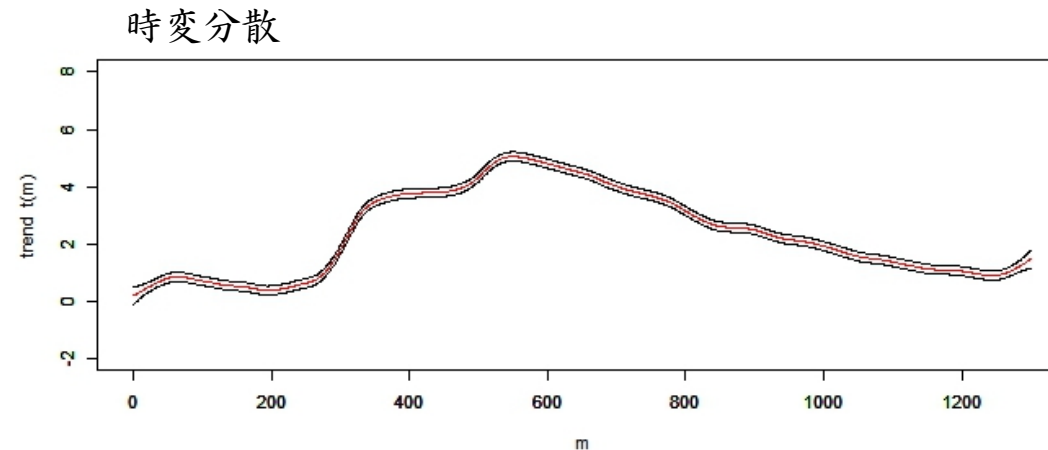
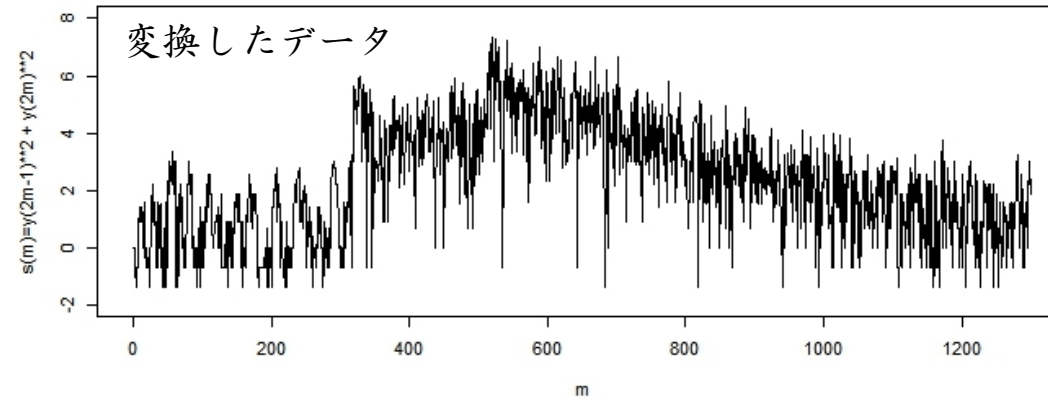
$$\log(y_{2m-1}^2 + y_{2m}^2)$$

$$g(w) = \exp \{ w - e^w \}$$

- 正規近似が良くなる
- データ数が少なくなる

時変分散の推定とデータの等分散化

```
# an earthquake wave data
data(MYE1F)
#
tvvar(MYE1F, 2, 6.6e-06, 1.0e-06)
```



ボラティリティの推定

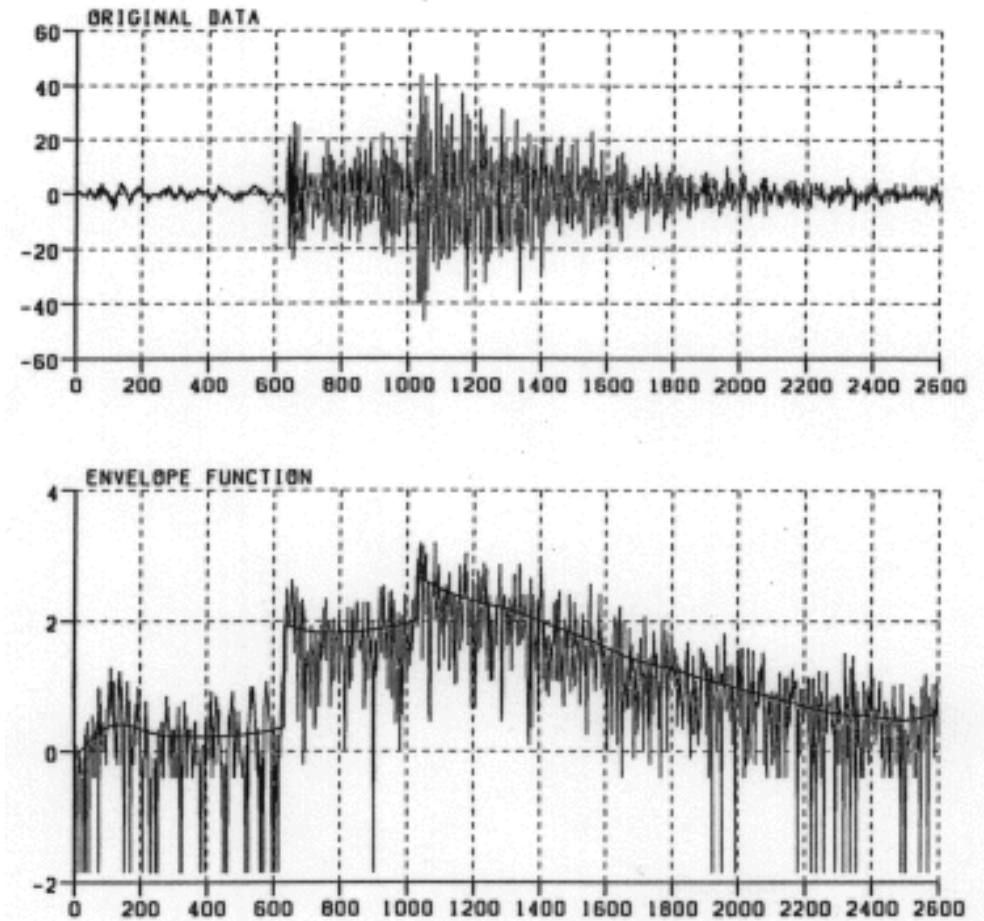
$$r_n = \sigma_n w_n$$

$$w_n \sim N(0,1)$$

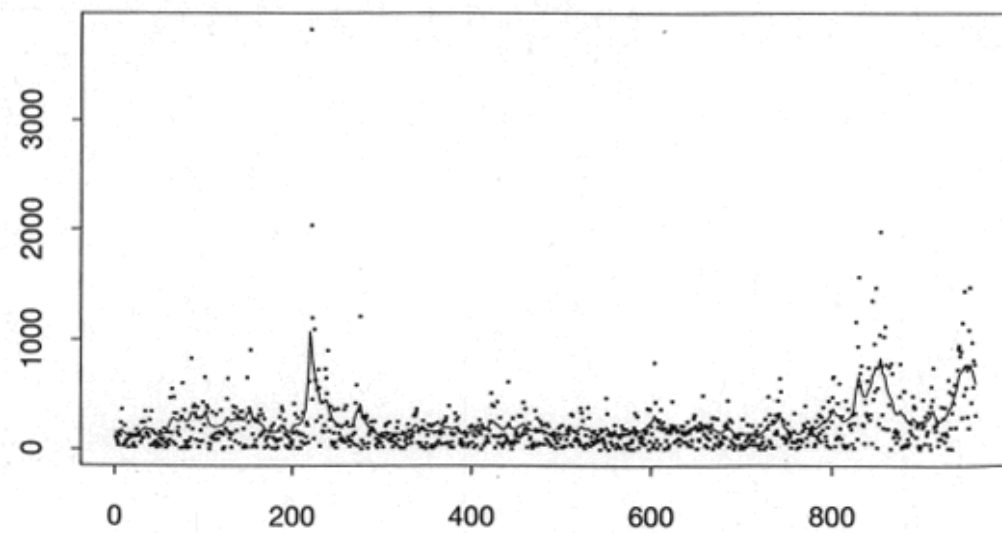
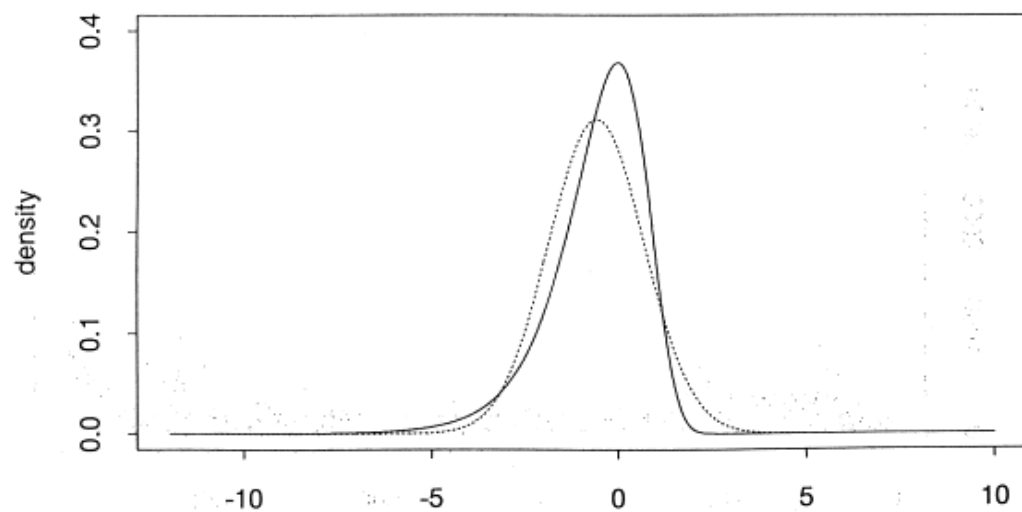
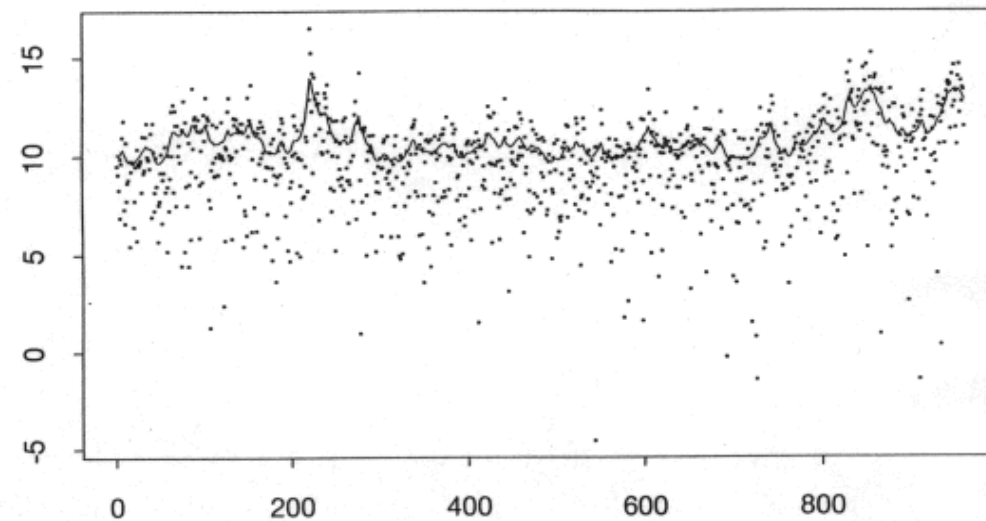
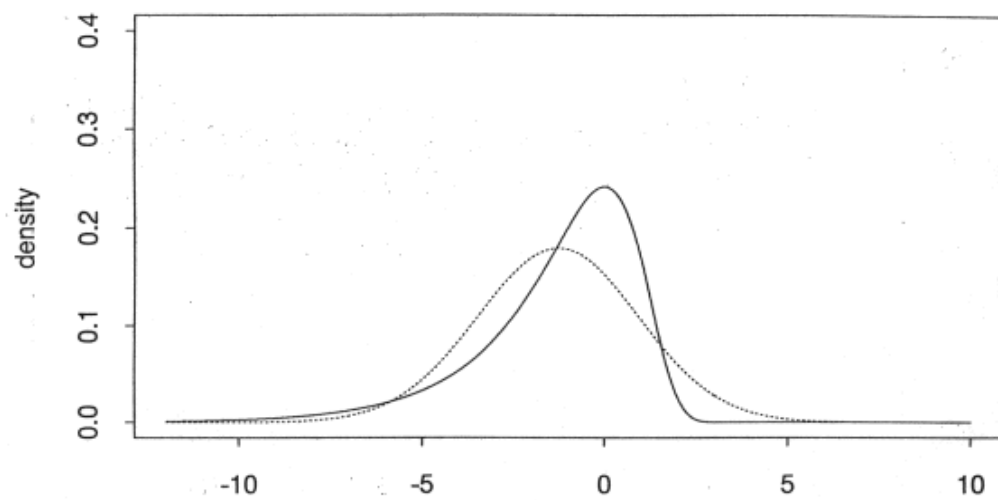
$$r_n^2 = \sigma_n^2 w_n^2$$

$$\log r_n^2 = \log \sigma_n^2 + \log w_n^2$$

$$\log w_n^2 \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{w}{2} - \frac{e^w}{2} \right\}$$



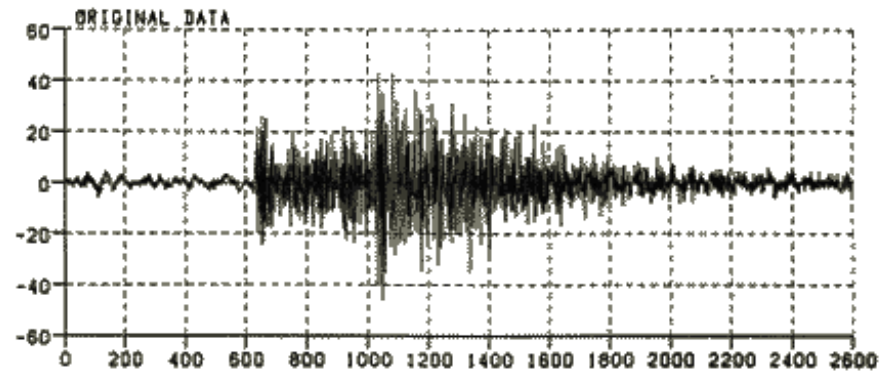
Stochastic Volatility



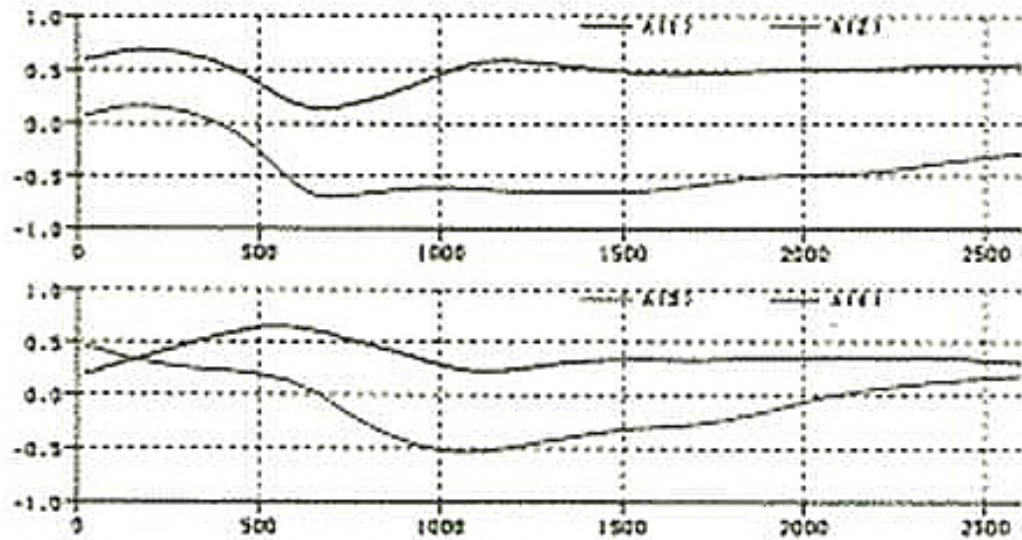
時変係数ARモデルのAIC

m	$k=1$	$k=2$	m	$k=1$	$k=2$
1	6492.5	6520.4	6	4831.9	4873.8
2	5527.7	5643.2	7	4821.6	4878.7
3	5070.0	5134.5	8	4805.1	4866.9
4	4820.0	4853.0	9	4813.4	4884.9
5	4846.0	4886.0	10	4827.1	4911.9

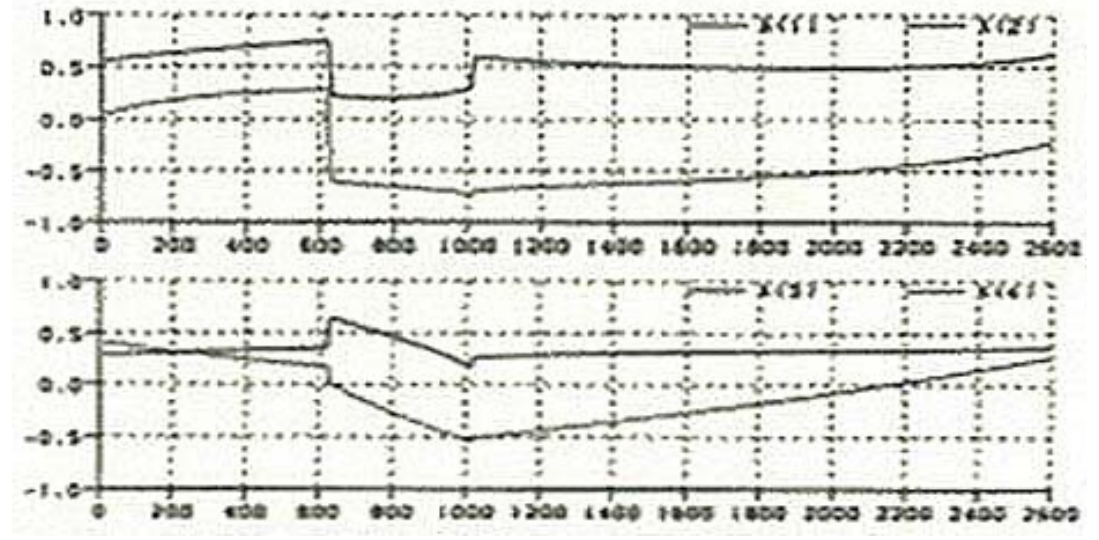
時変係数と時変スペクトル



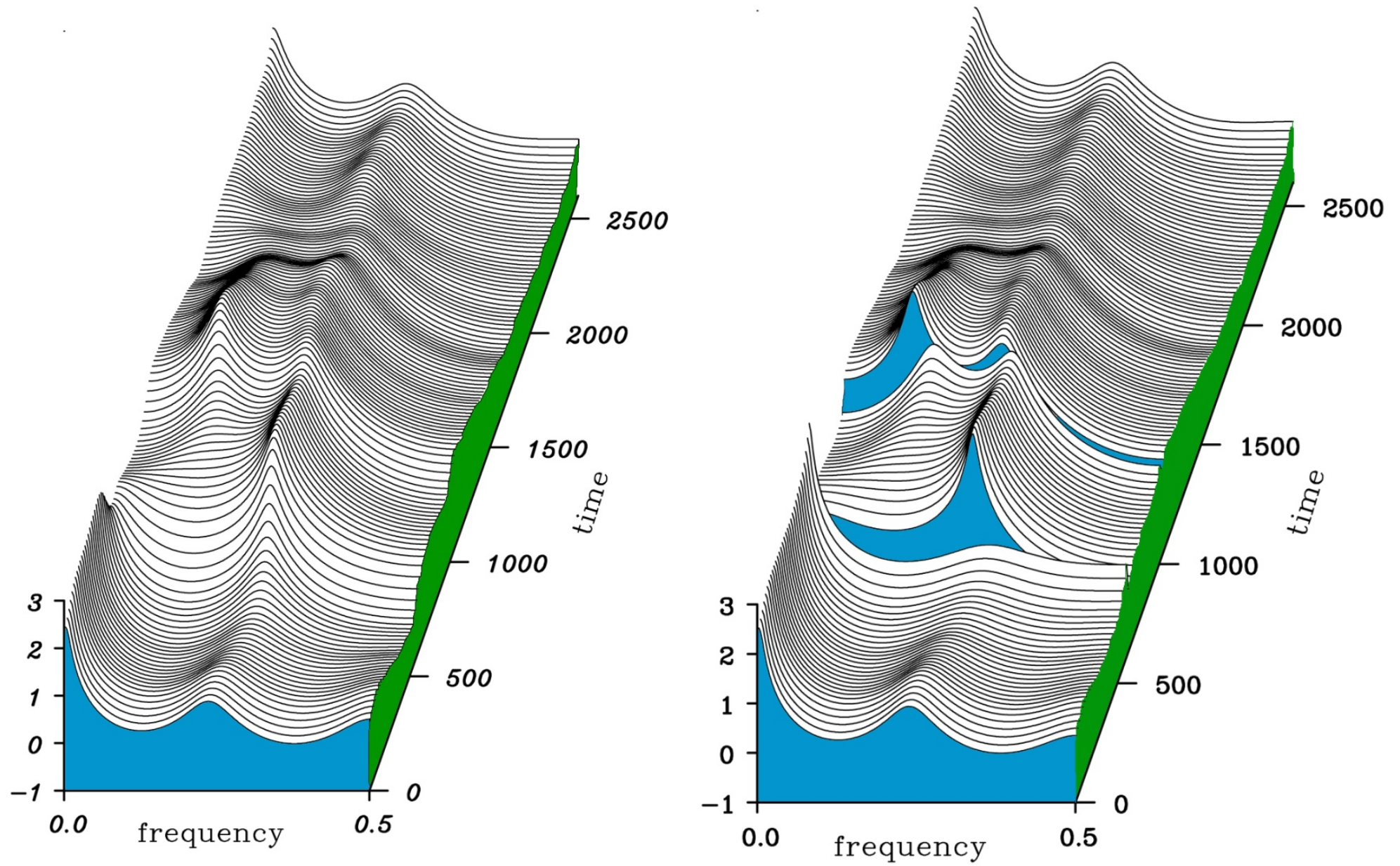
時変係数AR



局所定常構造
時変係数AR



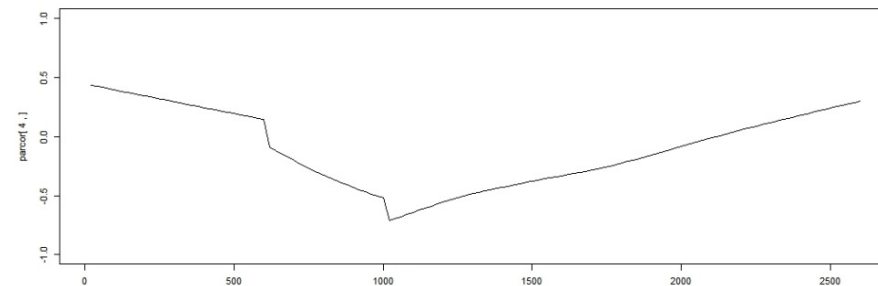
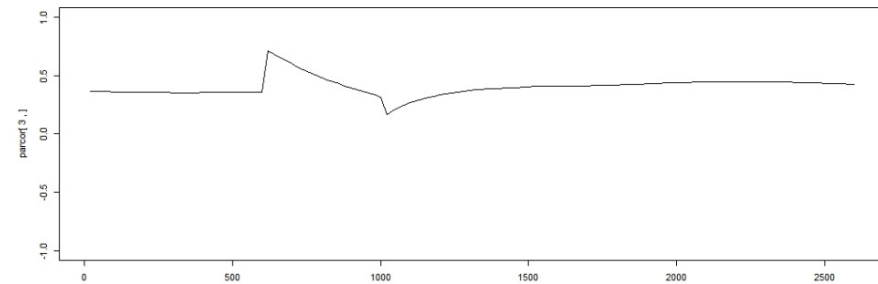
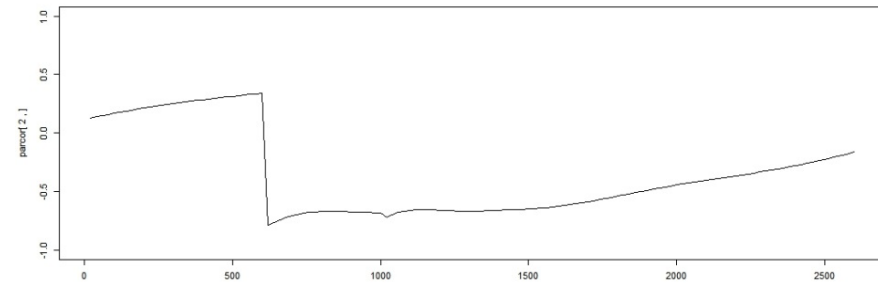
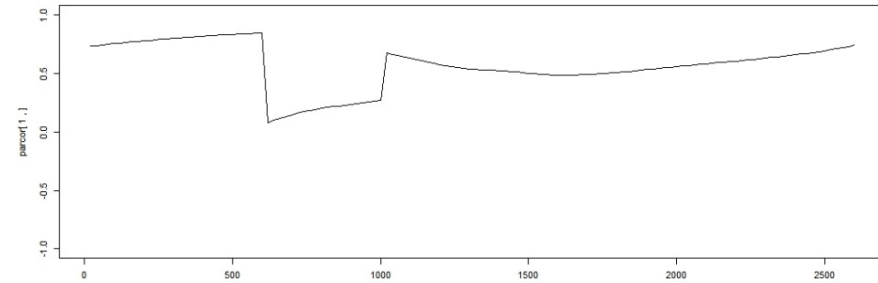
時変スペクトル



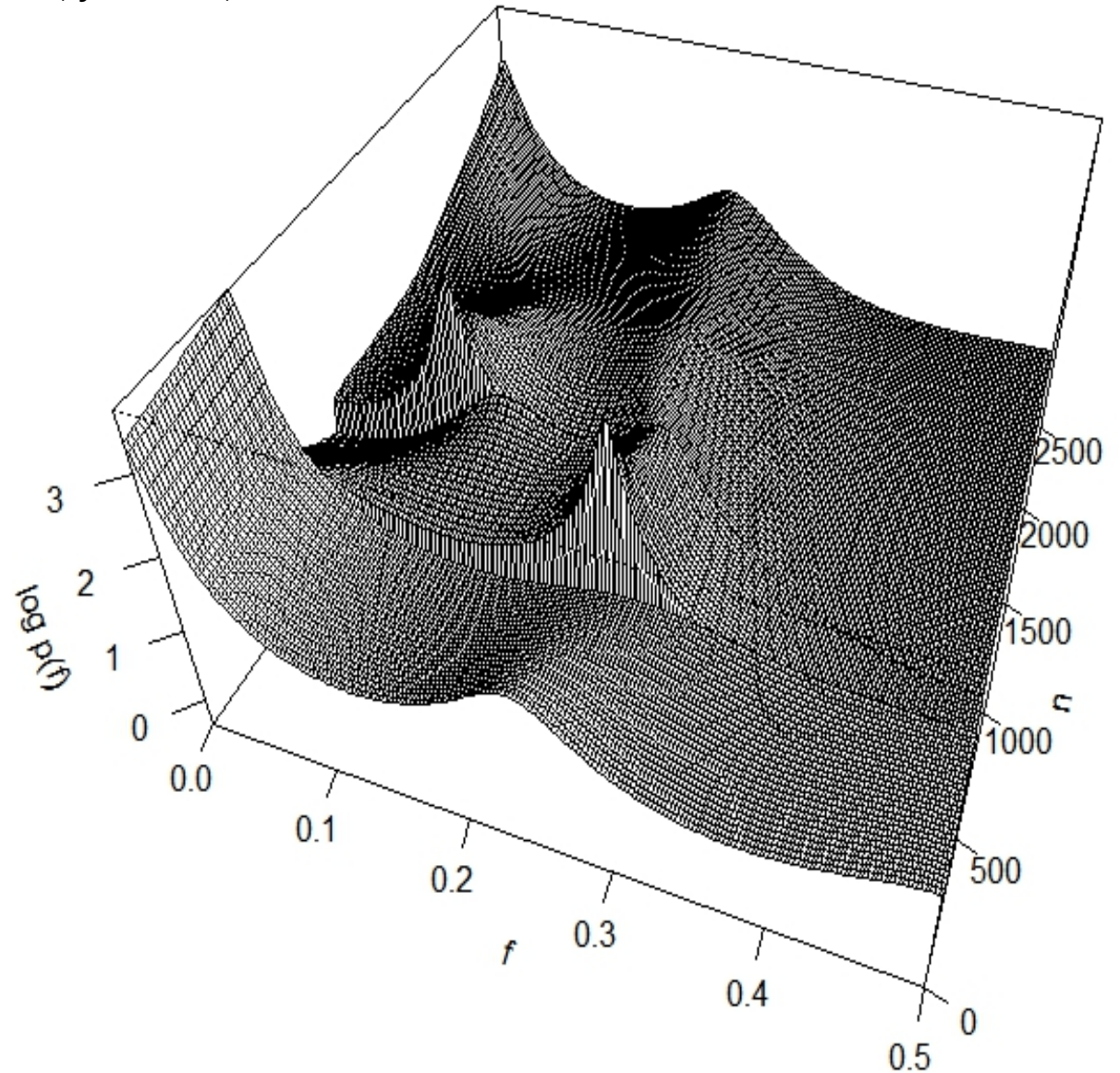
Rによる時変係数ARモデルの推定

```
data(MYE1F) # an earthquake wave data
z <- tvar(MYE1F, 4, 2, 20, c(630,1026),
          6.6e-06, 1.0e-06)

z$tau2
z$sigma2
z$lkhood
z$aic
```



```
data(MYE1F) # an earthquake wave data
z <- tvar(MYE1F, 4, 2, 20, c(630,1026), 6.6e-06, 1.0e-06)
spec <- tvspc(z$arcoef, z$sigma2,, 20)
persp(spec$x, spec$y, spec$z, expand=0.5, theta=20,
      col="lightblue", ticktype="detailed", xlab="f", ylab="n",
      zlab="log p(f)")
```



$$y_n = \sum_{j=1}^m A_j y_{n-j} + \sum_{j=1}^m B_j r_{n-j} + w_n$$

$$x_n = Fx_{n-1} + Gr_n + \Psi v_n$$

$$y_n = Hx_n$$

$$J_L(x_0) = \sum_{n=1}^L \left\{ x_n^T Q x_n + r_{n-1}^T R r_{n-1} \right\}$$

$Q: k \times k$ 半正定値行列

$R: q \times q$ 正定値行列

$$\min_{r_0, \dots, r_{L-1}} J_L(x_0)$$

$$J_L(x_0) = E \left[\sum_{n=1}^L \left\{ x_n^T Q x_n + r_{n-1}^T R r_{n-1} \right\} \right]$$

$$J_L(x_0) = E \left[\sum_{n=1}^L \left\{ x_n^T Q x_n + r_{n-1}^T R r_{n-1} + \Delta r_{n-1}^T T \Delta r_{n-1} \right\} \right]$$

最適制御則

$$J_L(x_0) = E \left[\sum_{n=1}^L \left\{ x_n^T Q x_n + r_{n-1}^T R r_{n-1} \right\} \right]$$

$$f_{n+1}(x) = \min_{\substack{r_n, \dots, r_{L-1} \\ x_n = x}} E \left[\sum_{i=n+1}^L \left\{ x_i^T Q x_i + r_{i-1}^T R r_{i-1} \right\} \right]$$

$$f_{n+1}(x) = \min_{\substack{r_n \\ x_n = x}} E \left[x_{n+1}^T S_n x_{n+1} + r_n^T R r_n \right]$$

$$\begin{aligned} & E \left[x_{n+1}^T S_n x_{n+1} + r_n^T R r_n \right] \\ &= E \left[(F x_n + G r_n + \Psi v_n)^T S_n (F x_n + G r_n + \Psi v_n) + r_n^T R r_n \right] \\ &= r_n^T (G^T S_n G + R) r_n + x_n^T F^T S_n G r_n + r_n^T G_n^T S_n F x_n + x_n^T F^T S_n F x_n + E \left[v_{n+1}^T \Psi^T S_n \Psi v_{n+1} \right] \\ &= \left\{ r_n + (G^T S_n G + R)^{-1} G_n^T S_n F x_n \right\}^T (G^T S_n G + R) \left\{ r_n + (G^T S_n G + R)^{-1} G_n^T S_n F x_n \right\} + x_n^T F^T S_n F x_n \\ &\quad - x_n^T F^T S_n G (G^T S_n G + R)^{-1} G_n^T S_n F x_n + E \left[v_{n+1}^T \Psi^T S_n \Psi v_{n+1} \right] \end{aligned}$$

$$r_n = -(G^T S_n G + R)^{-1} G_n^T S_n F x_n$$

$$f_{n+1}(x) = x_n^T F^T S_n F x_n - x_n^T F^T S_n G (G^T S_n G + R)^{-1} G_n^T S_n F x_n + \text{const.}$$

最適制御則 (2)

$$f_{n+1}(x) = x_n^T F^T S_n F x_n - x_n^T F^T S_n G (G^T S_n G + R)^{-1} G_n^T S_n F x_n + \text{const.}$$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \min_{\substack{r_n \\ x_{n-1}=x}} E \left[x_n^T Q x_n + r_{n-1}^T R r_{n-1} + f_{n+1}(x_n) \right] \\ &= \min_{\substack{r_n \\ x_{n-1}=x}} E \left[x_n^T S_{n-1} x_n + r_{n-1}^T R r_{n-1} \right] \end{aligned}$$

$$S_L = Q$$

$$S_{n-1} = Q + F^T \left\{ S_n - S_n G (G^T S_n G + R)^{-1} G_n^T S_n \right\}$$

$$r_n^* = K_n x_n$$

$$K_n = -(G^T S_n G + R)^{-1} G_n^T S_n F$$

統計的制御 (概要)

ARXモデル

$$y_n = \sum_{j=1}^m A_j y_{n-j} + \sum_{j=1}^m B_j r_{n-j} + w_n$$

最適制御問題

$$x_n = Fx_{n-1} + Gr_n + \Psi v_n$$

$$y_n = Hx_n$$

$$J_L(x_0) = E \left[\sum_{n=1}^L \left\{ x_n^T Q x_n + r_{n-1}^T R r_{n-1} \right\} \right] \quad \min_{r_0, \dots, r_{L-1}} J_L(x_0)$$

最適制御則

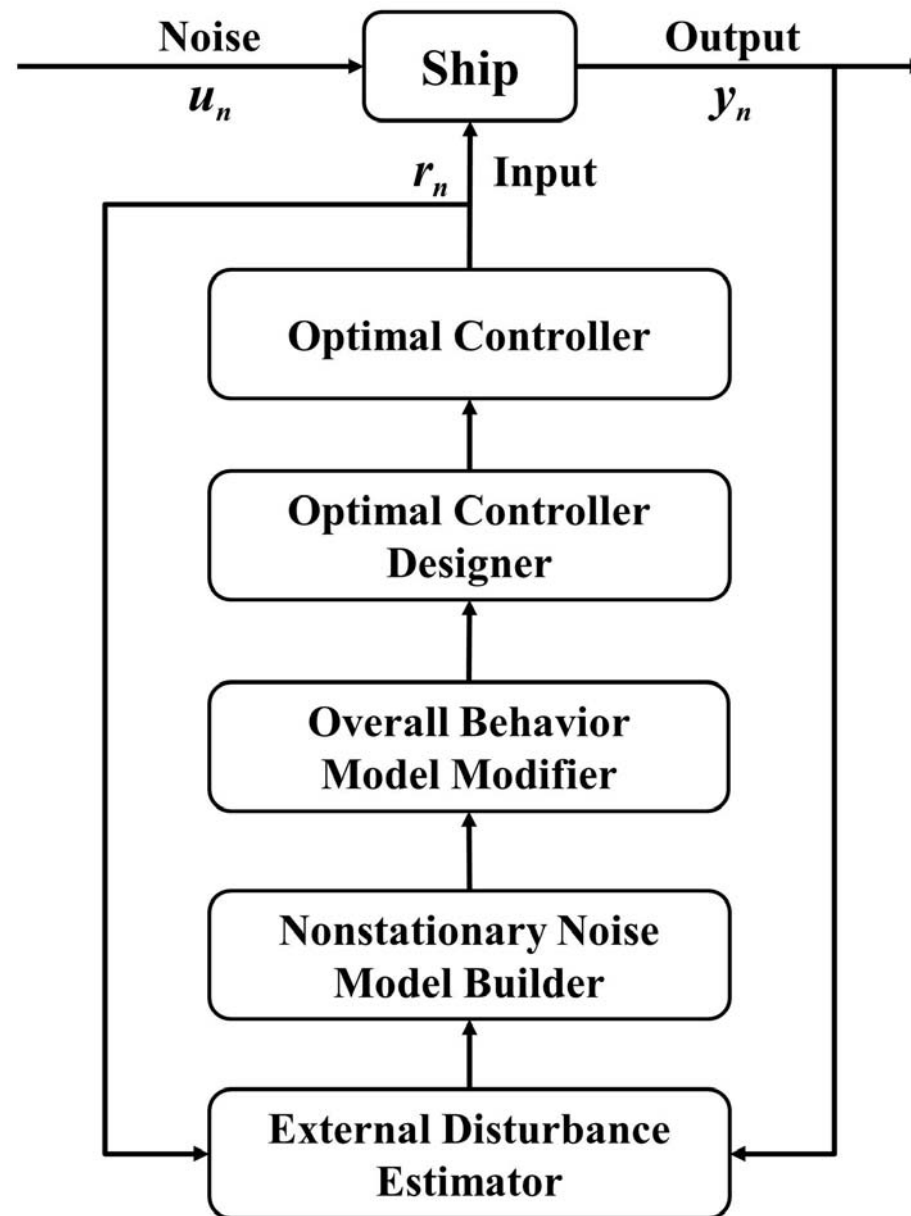
$$r_n^* = K_n x_n$$

$$K_n = -(G^T S_n G + R)^{-1} G_n^T S_n F$$

最適制御ゲイン計算アルゴリズム

$$S_L = Q$$

$$S_{n-1} = Q + F^T \left\{ S_n - S_n G (G^T S_n G + R)^{-1} G_n^T S_n \right\}$$



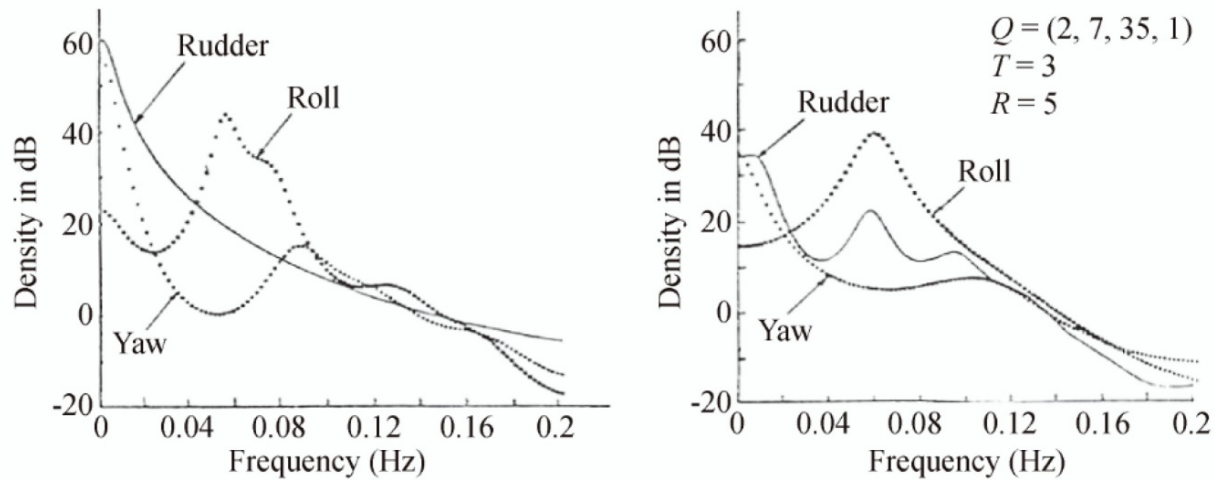
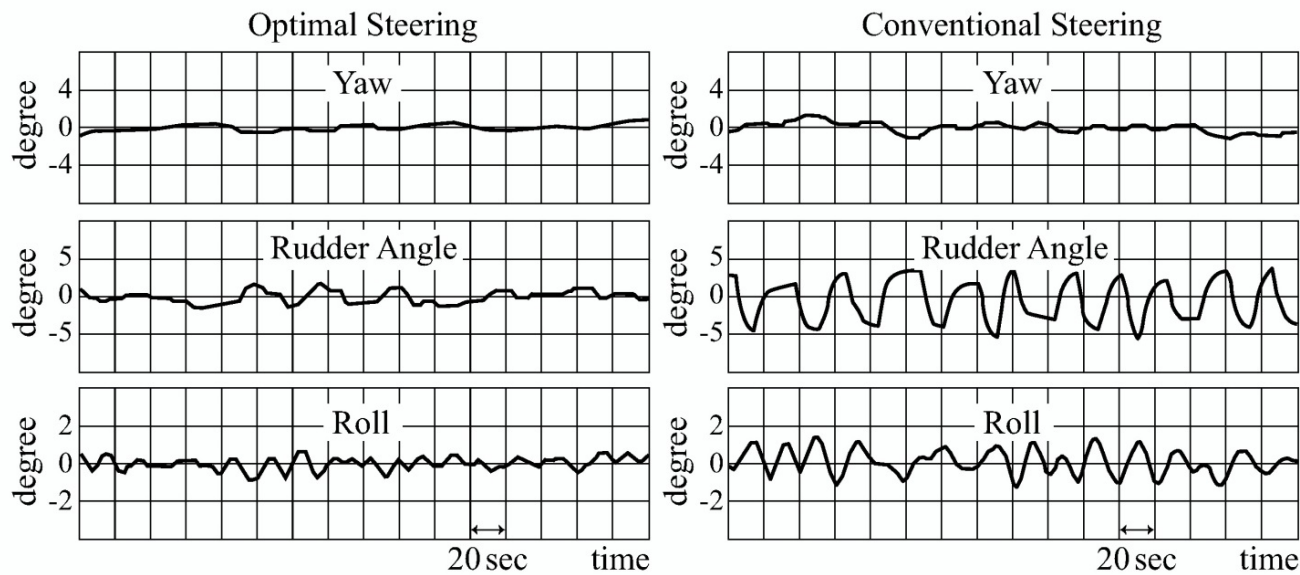
潮路丸実船実験

	Q	R	Pitch	Roll	Yaw	Yacc	Rudder	Diff.
(1)	(2,7,35,1)	0.850	1.726	4.575	1.709	0.0063	18.72	4.546
(2)	(3.6,7,40,1.67)	1.015	1.444	4.915	1.674	0.0062	19.12	5.052
(3)	(0,6.33,57.8,0)	0.860	2.242	4.473	1.672	0.0068	18.66	4.931
(4)	manual	-	2.771	6.557	7.781	0.0081	17.62	0.832



Pitch	縦揺れ
Roll	横揺れ
Yaw	方向角偏差
Rudder	舵角

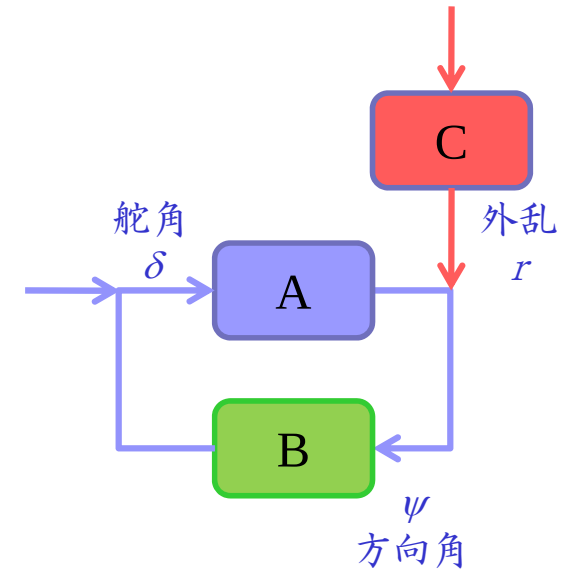
Analog Record of the First Sea Test



NADCONと適応型オートパイロット

北川・赤池・大津 (1980)

- 船体運動モデル + 外乱モデル
- 外乱モデルに局所定常ARモデルを用いて非定常モデル化
- 外乱の変化に適応する適応制御システムを提案 (Noise Adaptive Controller; NADCON)



横河電子機器が大型船舶用
主力システムPT500Aに採用 (2008年)
次世代オートパイロットPT900に標準装備

Tong, 赤池, 大津



PT500 オートパイロット

直進中も連続的に船体運動特性を同定
BNAACが省エネ性を実現します

■ **BNAAC**: Batch Noise Adaptive Autopilot Controller

制御型自己回帰モデルで省エネモード

設定値
針路偏差
基本モデル
船体運動基本モデル
外乱モデル
モデル同定器
(モデル不一致分)
一定期間の時系列データから、不一致分を抽出
船体運動基本モデル
現在の船体運動モデル
重ね合わせ
最適ゲイン
性能評価関数およびゲイン計算機
モード選択
(操舵/修正)
最適ゲインの更新
舵角計算 (PD)
命令舵角 θ
ジャイロ方位 ψ
船速 V
舵取機
ジャイロコンパス
電磁ログ
風・波浪

■ PT500Aにプリント基板をアドオン
新製品

BNAACの頭脳
新プリント基板

PT500A アダプティブ制御

YOKOGAWA
横河電子機器株式会社
Yokogawa Denshikiki Co., Ltd.

統計数理研究所 北川源四郎所長
東京海洋大学 大津皓平名誉教授 ご指導
(C) Copyright 2009 Yokogawa Denshikiki Co., Ltd.