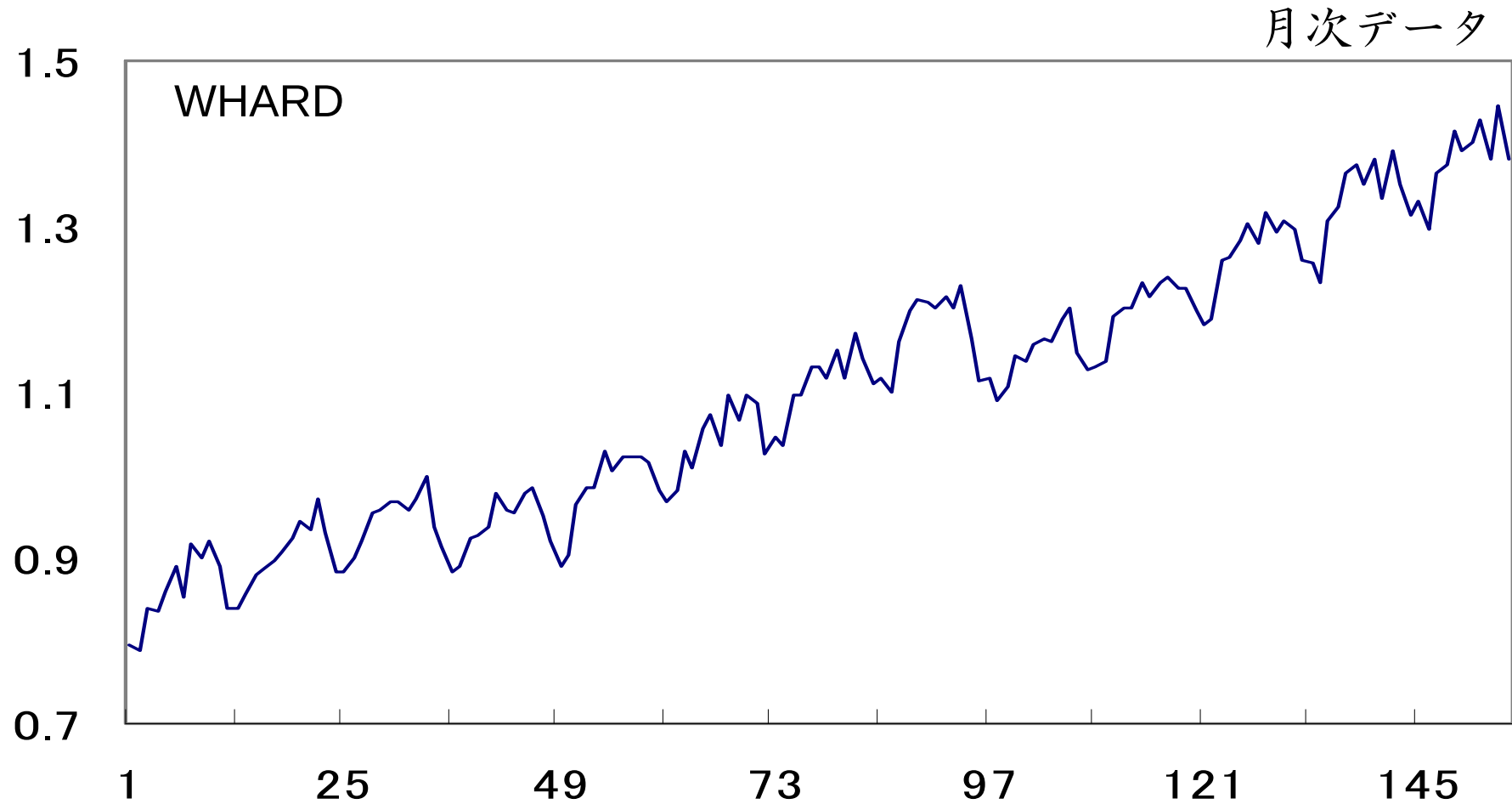


時系列解析（10）

－季節調整モデルと成分分解・信号抽出－

東京大学 数理・情報教育研究センター
北川 源四郎

季節調整とは



何らかの原因で特定の周期で繰り返す成分を
除去して本質的な現象を抽出する方法

季節調整モデル

観測モデル

$$y_n = t_n + s_n + w_n$$

y_n : 観測値

t_n : トレンド成分

s_n : 季節成分

w_n : 不規則成分 (ノイズ)

非定常時系列をいくつかの成分に分解する方法

- ・ 合成モデルによる成分分解
- ・ 本質的な変動を抽出する
- ・ 予測精度を向上させる

トレンド成分モデル

$$\Delta \equiv 1 - B$$

$$\underset{\text{多項式}}{\Delta^k t_n = 0} \Rightarrow \Delta^k t_n \cong 0 \Rightarrow \underset{\text{局所多項式}}{\Delta^k t_n = v_n}$$

$$\Delta^k t_n = v_n, \quad v_n \sim N(0, \tau^2)$$

$$\begin{aligned} k=1 & \quad t_n = t_{n-1} + v_n \\ k=2 & \quad t_n = 2t_{n-1} - t_{n-2} + v_n \\ k=3 & \quad t_n = 3t_{n-1} - 3t_{n-2} + v_{n-3} + v_n \end{aligned}$$

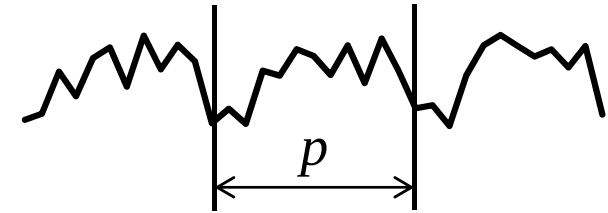
状態空間表現

$$k=1 \quad x_n = t_n, \quad F=1, \quad G=1, \quad H=1$$

$$k=2 \quad x_n = \begin{bmatrix} t_n \\ t_{n-1} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

季節成分モデル

p : 周期



完全な周期

$$s_n = s_{n-p} = B^p s_n$$

擬似的周期

$$s_n \cong s_{n-p} = B^p s_n$$

$$S_n = S_{n-p} + u_n, \quad u_n \sim N(0, \tau^2)$$

$$(1 - B^p)S_n = u_n$$

状態空間表現

$$x_n = \begin{bmatrix} S_n \\ S_{n-1} \\ \vdots \\ S_{n-p+1} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$H = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

2次の季節成分モデル

$$(s_n - s_{n-p})^2 = u_n$$

$$s_n = 2s_{n-p} - s_{n-2p} + u_n$$

季節調整モデル

$$\begin{aligned}y_n &= t_n + s_n + w_n \\(1-B)^k t_n &= v_n \\(1-B^p)s_n &= u_n\end{aligned}$$

実際には、このモデルはうまく機能しない

$$1-B^p = (1-B)(1+B+\cdots+B^{p-1})$$

$1-B$ を共通の因子として含むため

$$(1-B)e_n = 0 \quad \text{の任意の解} \quad e_n = c$$

$$t'_n = t_n + c$$

$$s'_n = s_n - c$$

$$y_n = t_n + s_n + w_n = t'_n + s'_n + w_n$$

季節成分モデル（共通因子の除去）

$$1 - B^p = (1 - B)(1 + B + \cdots + B^{p-1})$$

$$1 + B + \cdots + B^{p-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - B^p = 0$$

$$(1 + B + \cdots + B^{p-1})s_n = u_n$$

$$s_n = -(s_{n-1} + \cdots + s_{n-p+1}) + u_n$$

季節成分モデルの状態空間表現

$$x_n = \begin{bmatrix} s_n \\ s_{n-1} \\ \vdots \\ s_{n-p+2} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

季節調整モデル（基本型）

$$y_n = t_n + s_n + w_n$$

$$\Delta^k t_n = v_n$$

$$s_n = -(s_{n-1} + \cdots + s_{n-p+1}) + u_n$$

$$w_n \sim N(0, \sigma^2)$$

$$v_n \sim N(0, \tau_1^2)$$

$$u_n \sim N(0, \tau_2^2)$$

季節調整モデルの状態空間表現（合成モデル）

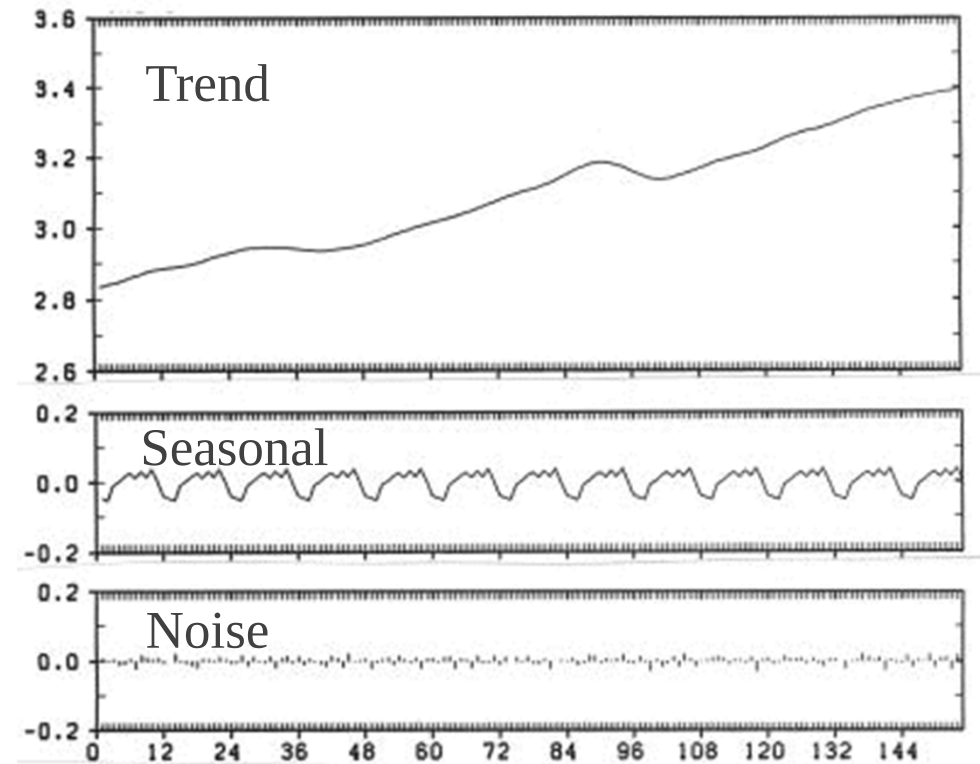
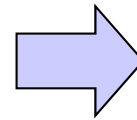
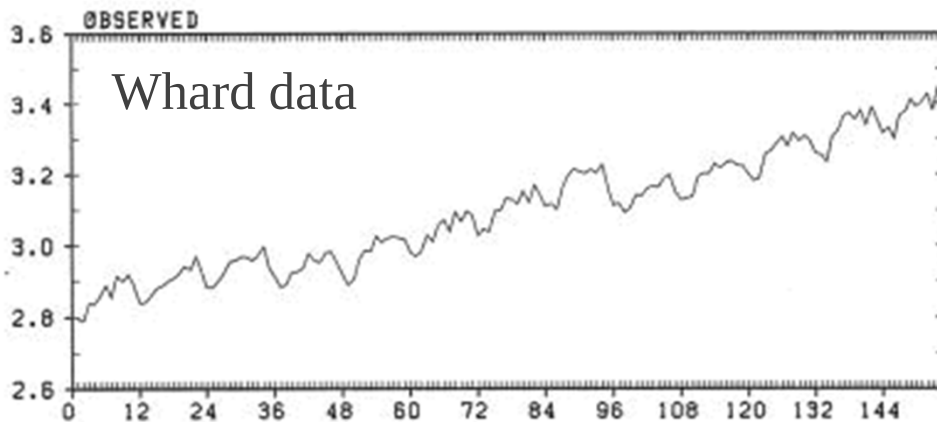
$$\begin{aligned}x_n &= F x_{n-1} + G v_n \\ y_n &= H x_n + w_n\end{aligned}$$

$k=2, p=4$ の場合 $x_n = [t_n, t_{n-1} | s_n, s_{n-1}, s_{n-2}]^T$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$H = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

季節調整法

観測値 = トレンド + 季節成分 + 偶然変動



$$k = 2, \quad p = 12$$
$$\hat{\sigma}^2 = 0.156 \times 10^{-3}$$
$$\hat{\tau}_1^2 = 0.0248$$
$$\hat{\tau}_2^2 = 0.11 \times 10^{-7}$$

標準的方法 (Blsallfood data)

$$k = 2, \quad p = 12$$

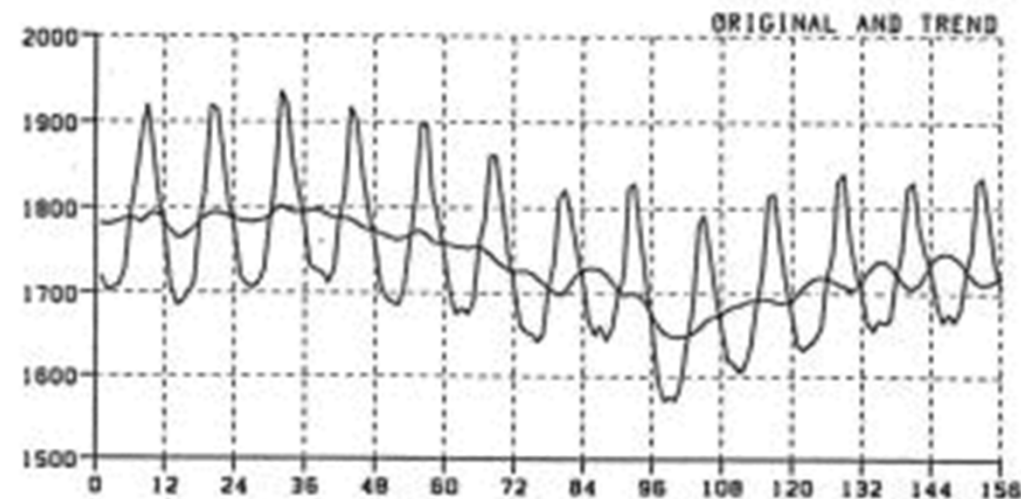
$$\hat{\sigma}^2 = 32.8907$$

$$\hat{\tau}_1^2 = 7.230 \times 10^{-1}$$

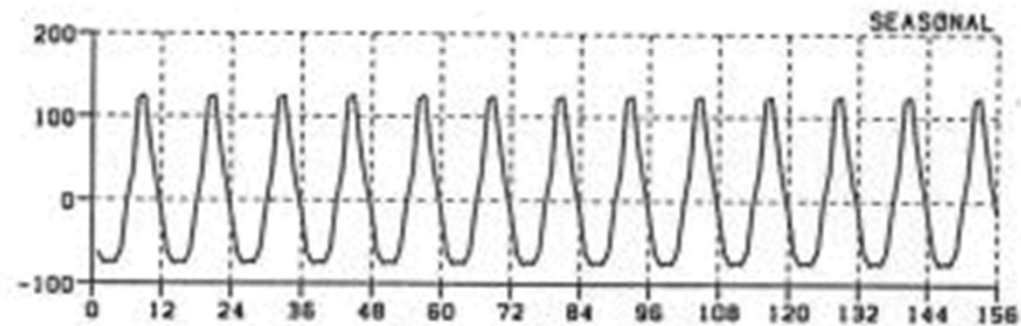
$$\hat{\tau}_2^2 = 1.100 \times 10^{-8}$$

$$\text{AIC} = 1369.3$$

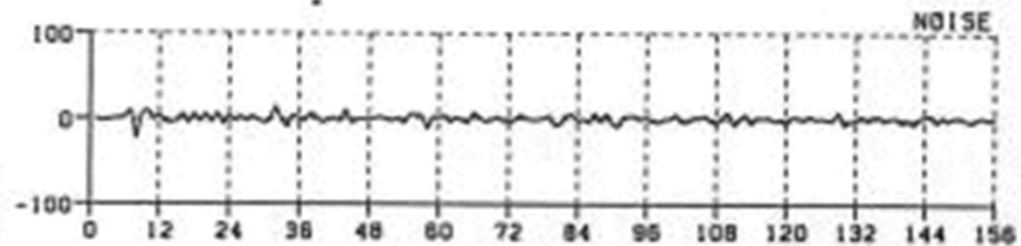
Trend



Seasonal



Noise



標準的季節調整モデル
で問題が生じた例：
データの終盤でトレンド
が波打っている

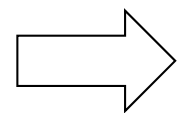
循環変動の抽出

$$y_n = t_n + s_n + p_n + w_n$$

循環変動成分

$$p_n = a_1 p_{n-1} + \cdots + a_m p_{n-m} + r_n$$

トレンド成分より短期的で定常変動成分



ARモデルで表現

季節調整モデル（循環変動成分つき）

$$y_n = t_n + s_n + p_n + w_n$$

$$\Delta^k t_n = v_{1n}$$

$$s_n = -(s_{n-1} + \cdots + s_{n-p+1}) + v_{2n}$$

$$p_n = a_1 p_{n-1} + \cdots + a_m p_{n-m} + v_{3n}$$

$$x_n = \begin{bmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_{n-m+1} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

状態空間表現

$$x_n = F x_{n-1} + G v_n$$

$$y_n = H x_n + w_n$$

$$x_n = [t_n, t_{n-1} \mid s_n, s_{n-1}, \dots, s_{n-10} \mid p_n, p_{n-1}]$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

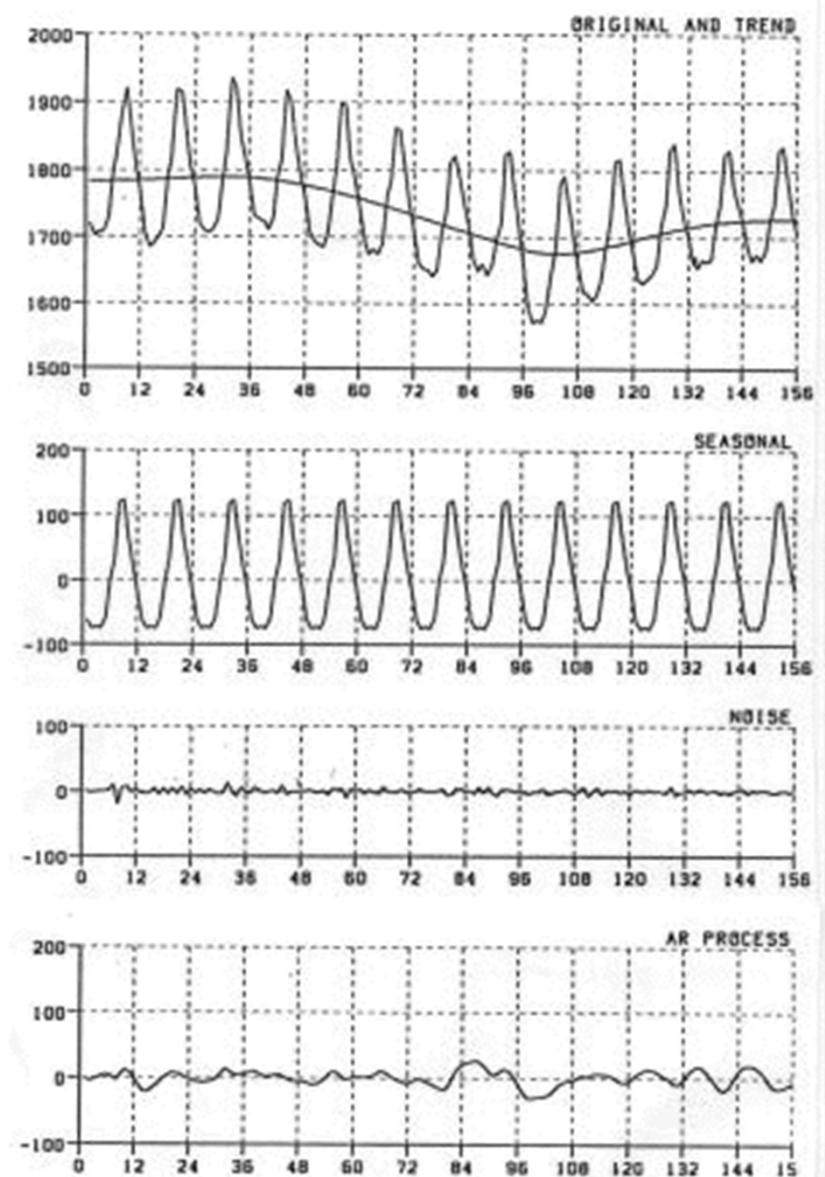
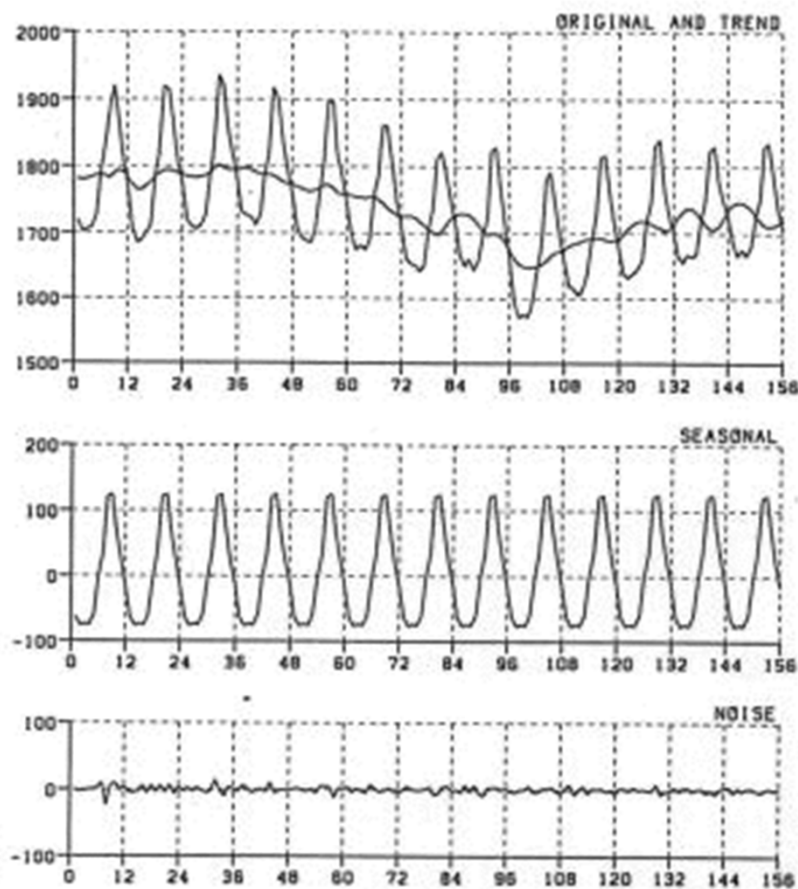
$$H = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

Trend

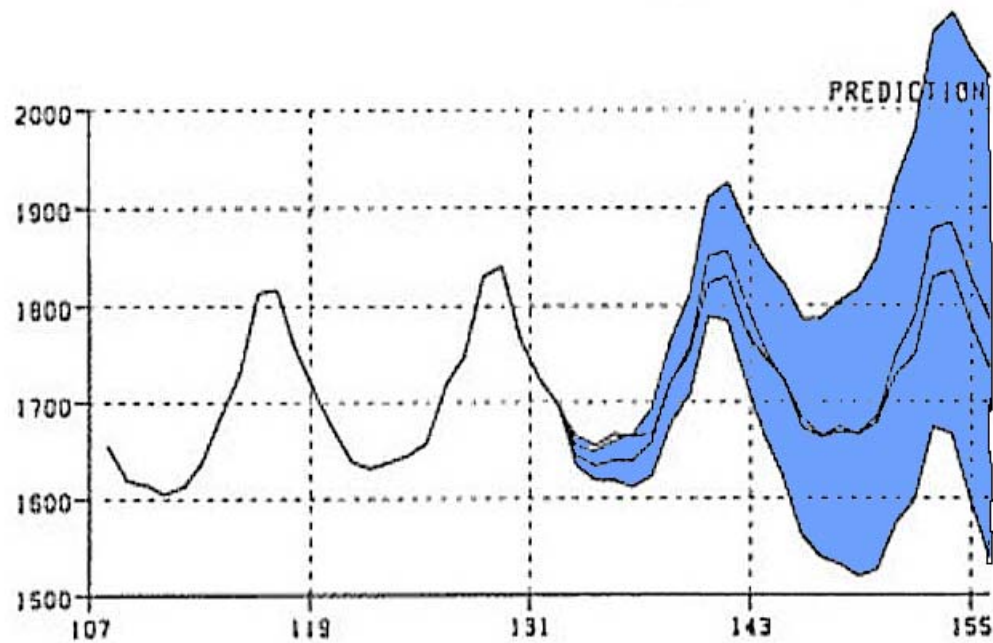
Seasonal

Noise

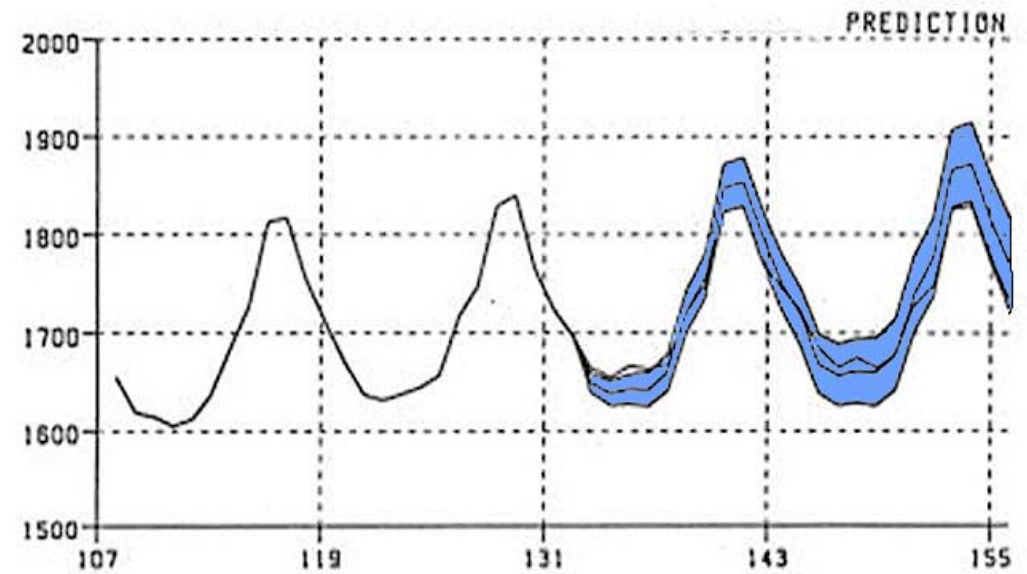
Cycle



長期予測の精度

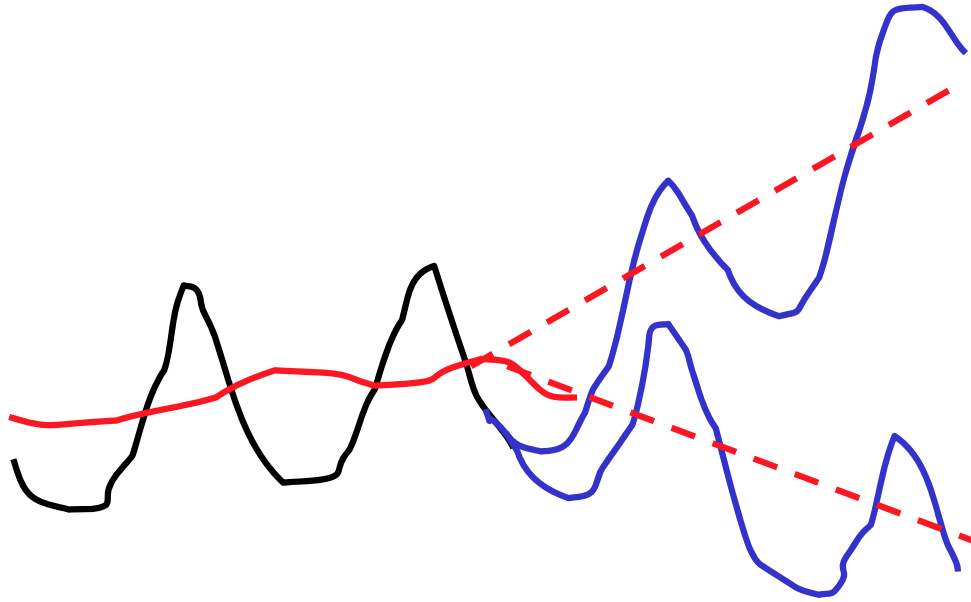


標準的方法

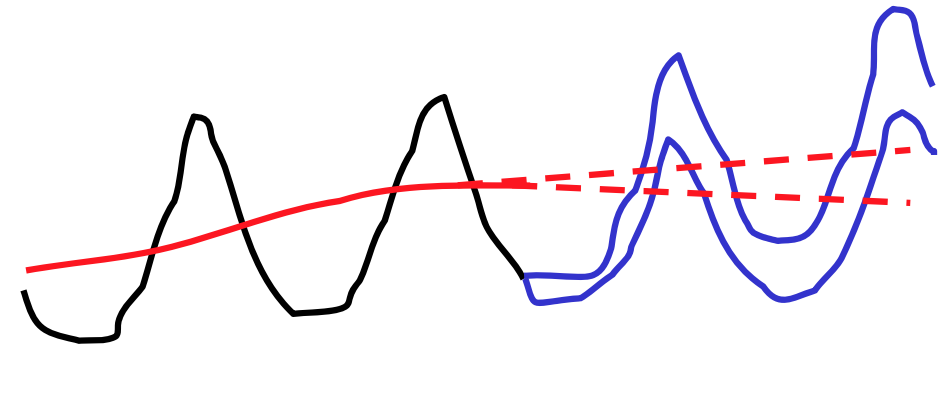


循環変動成分を含む方法

長期予測



標準的方法



循環変動成分を含む方法

季節成分の予測精度は同じでもトレンド
の予測精度が大きく異なる

Rによる計算 (TSSSパッケージ: season)

```
data(Blsallfood)
```

```
season(Blsallfood, 2, 1)
```

```
$tau2      [1] 7.229607e-01 1.099998e-08
```

```
$sigma2    [1] 32.89071
```

```
$lkhood    [1] -669.6522
```

```
$aic       [1] 1369.304
```

```
season(Blsallfood, 2, 1, 2)
```

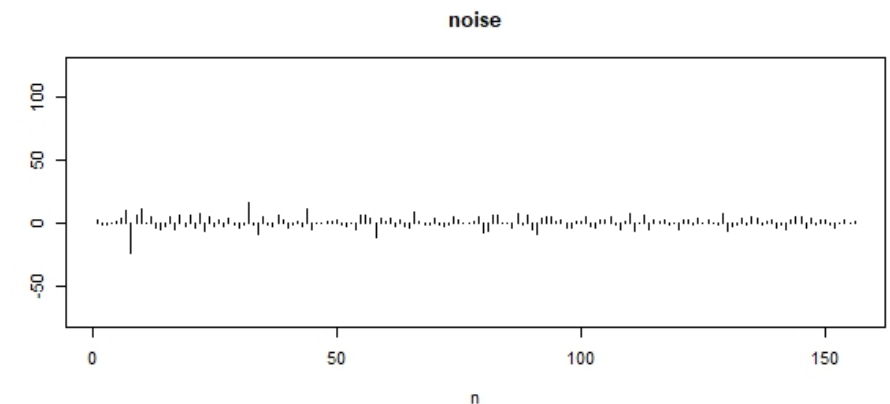
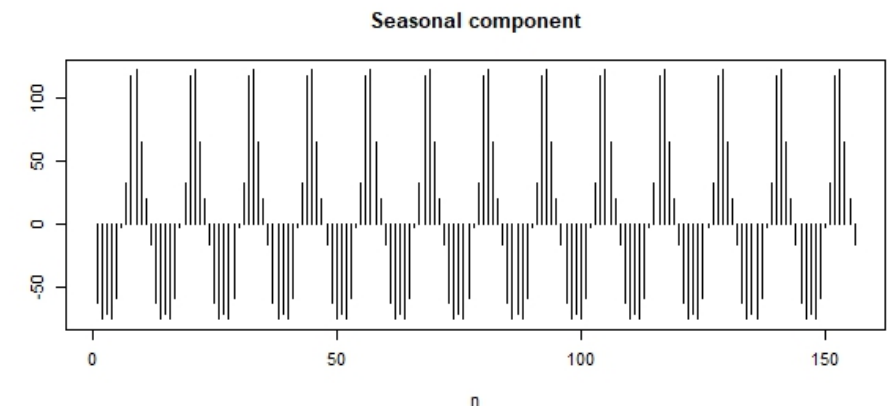
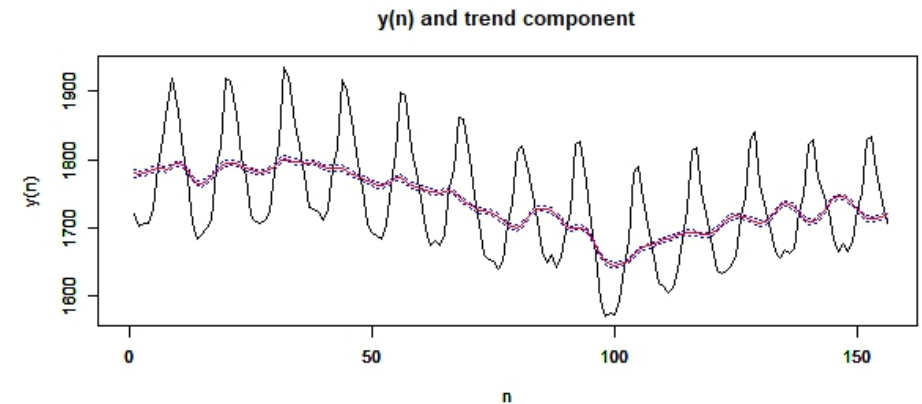
```
$tau2      [1] 7.229536e-03 1.099771e-08 9.999101e-01
```

```
$sigma2    [1] 27.02489
```

```
$lkhood    [1] -648.2725
```

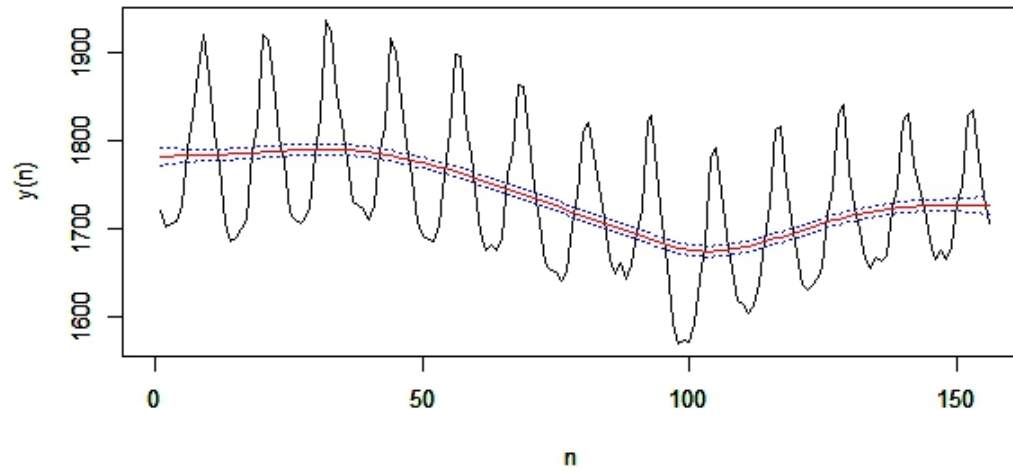
```
$aic       [1] 1336.545
```

```
$arcoef    [1] 1.3579988 -0.5400455
```

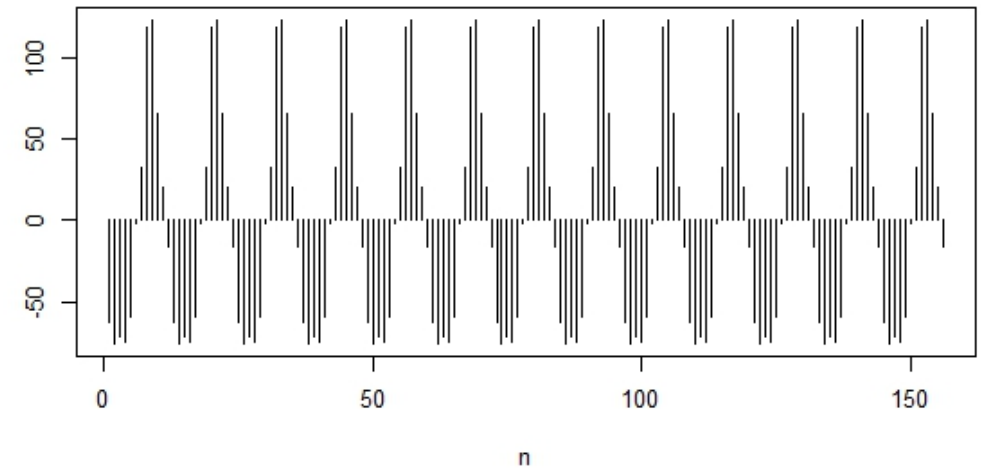


```
data(Blsallfood)
season(Blsallfood, 2, 1, 2)
```

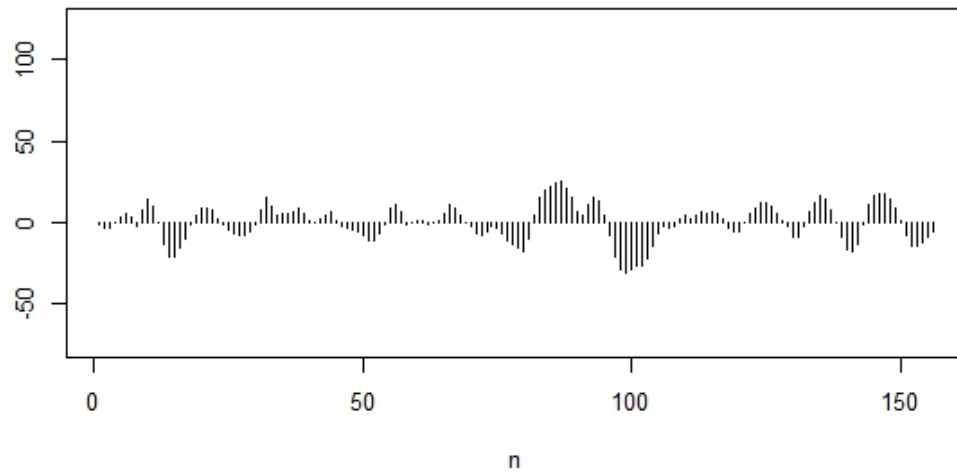
y(n) and trend component



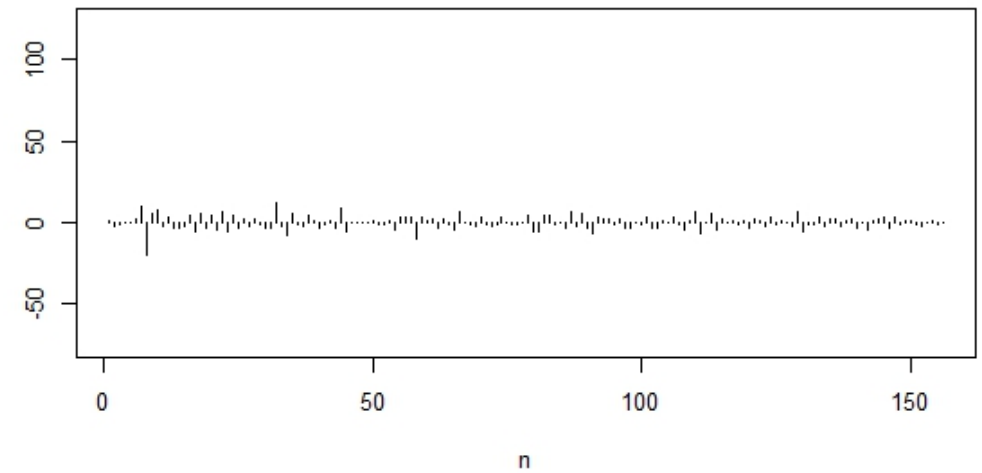
Seasonal component



AR component



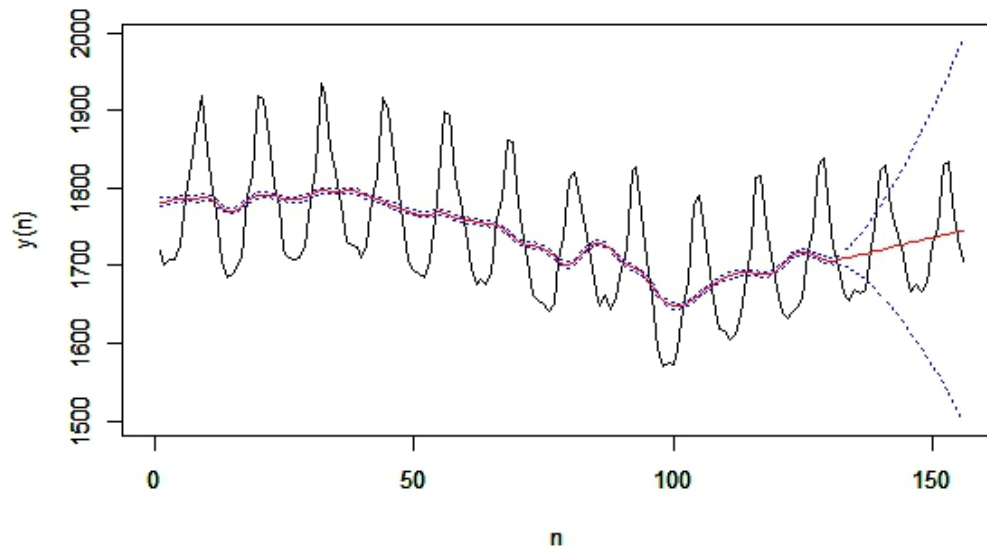
noise



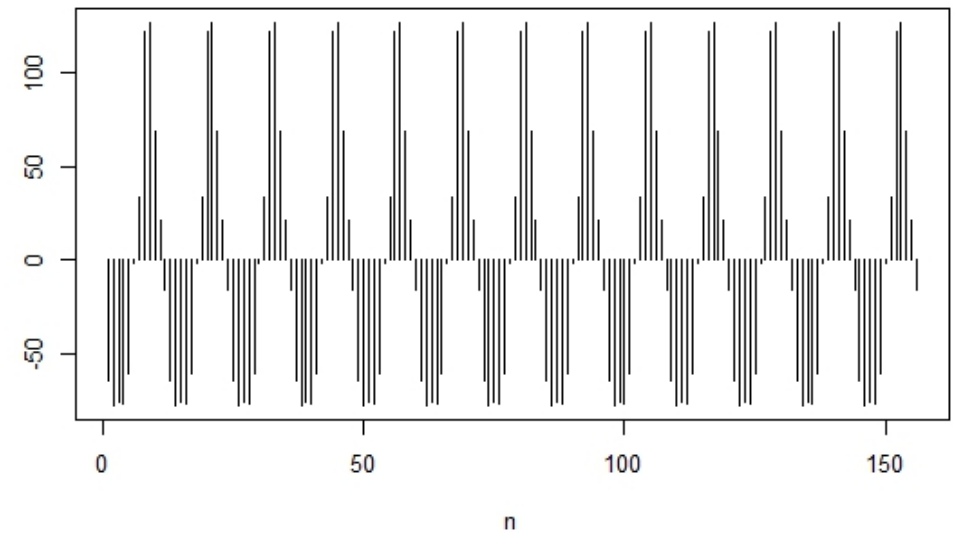
長期予測 ($n=133,156$)

season(Blsallfood, 2, 1, filter=c(1,132))

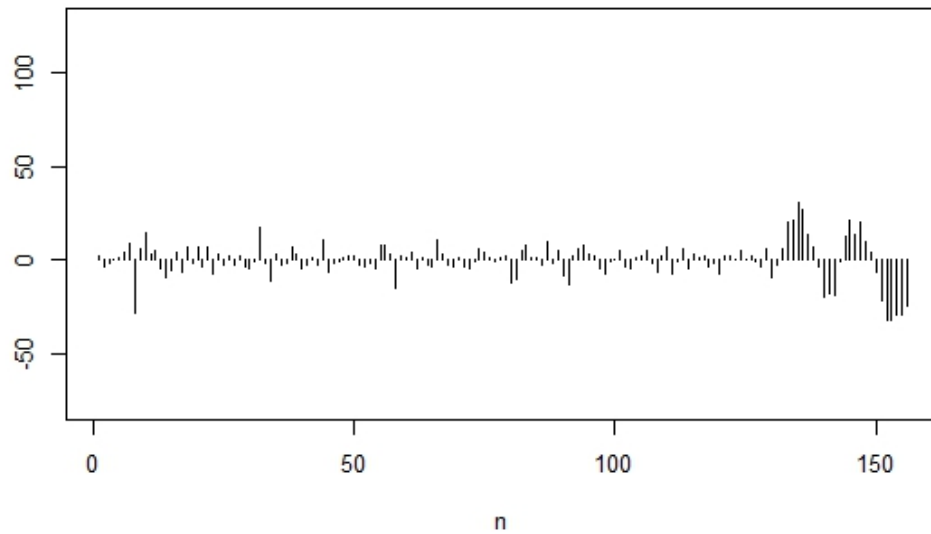
y(n) and trend component



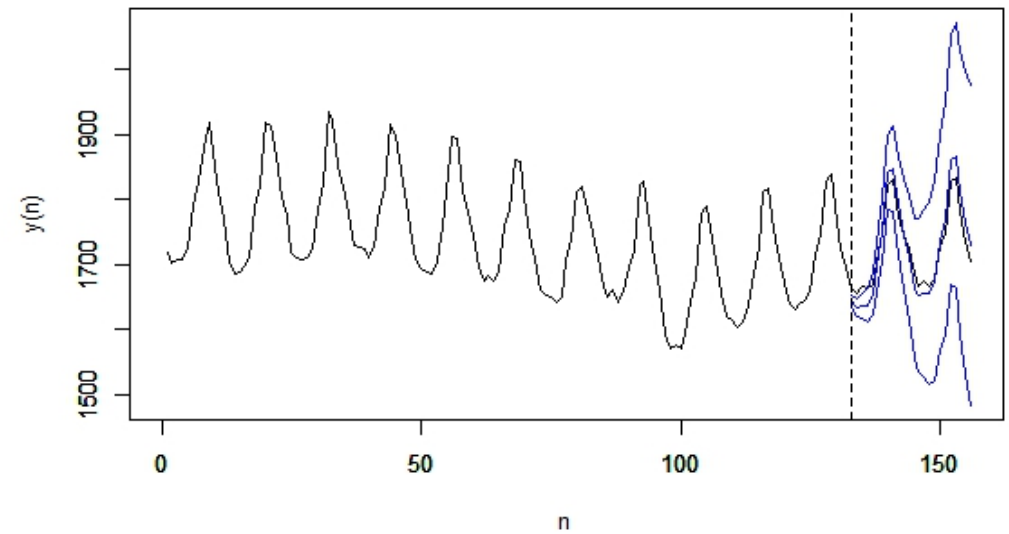
Seasonal component



noise

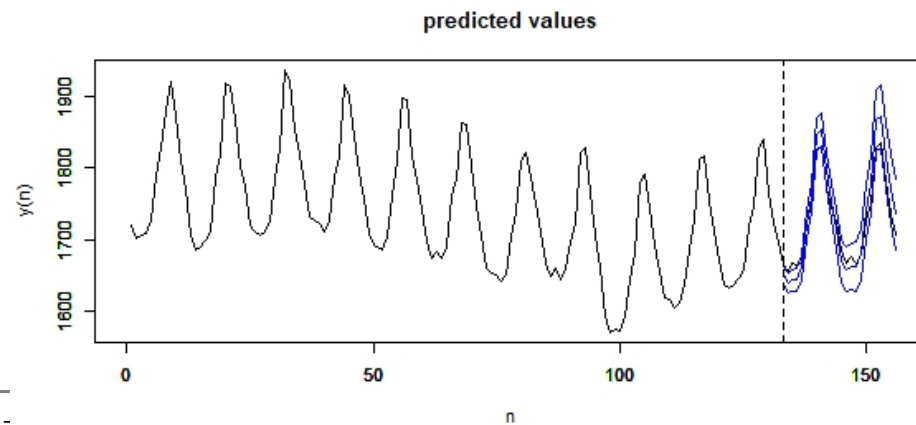
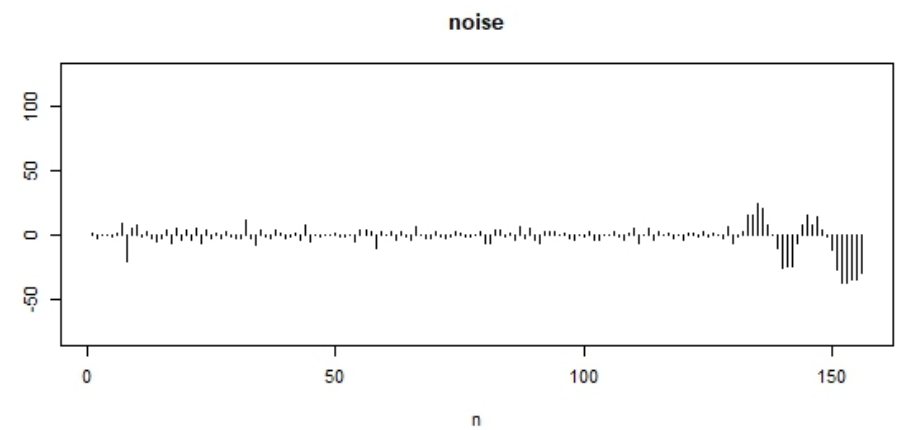
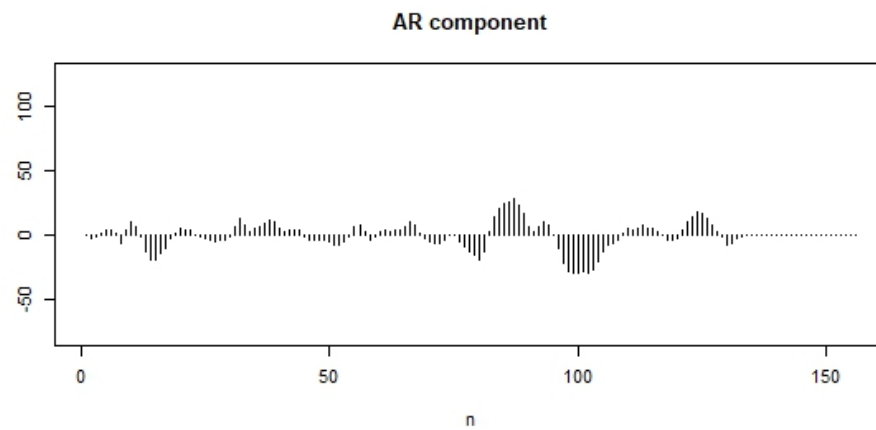
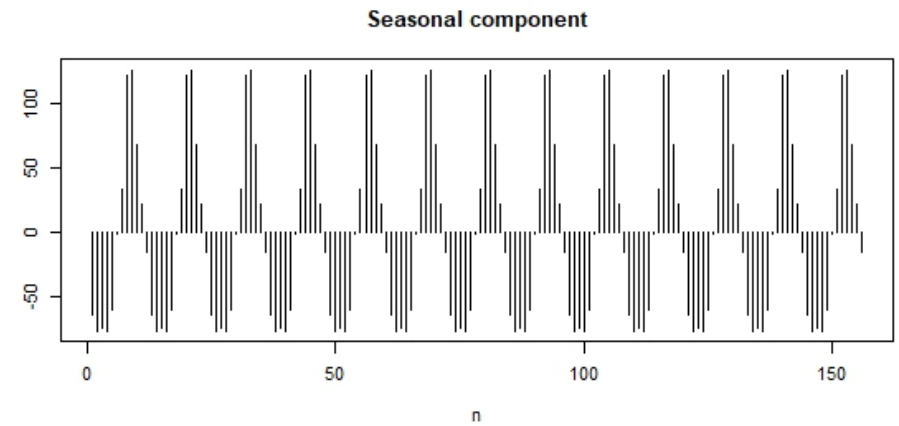
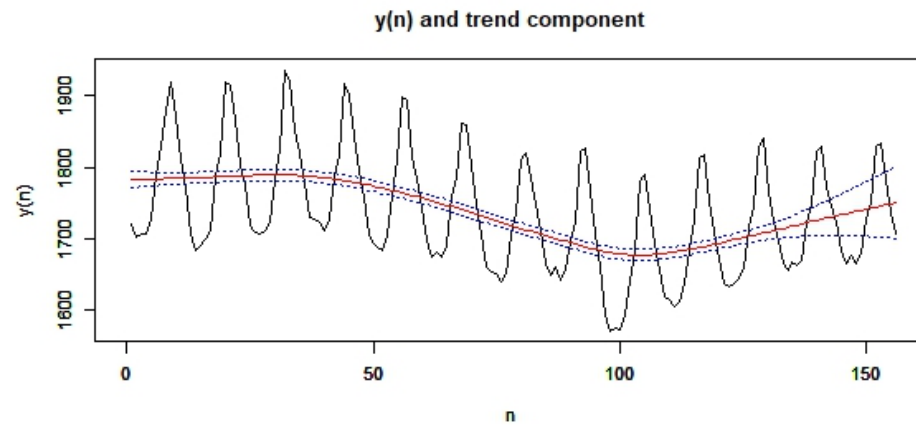


predicted values



長期予測 ($n=133,156$)

season(Blsallfood, 2, 1, 2, filter=c(1,132))



WHARD data

`season(Whard, 2, 1, log=TRUE)`

\$tau2 [1] 2.593525e-02 1.099988e-08

\$sigma2 [1] 0.0001501694

\$lkhood [1] 342.5324

\$aic [1] -655.0648

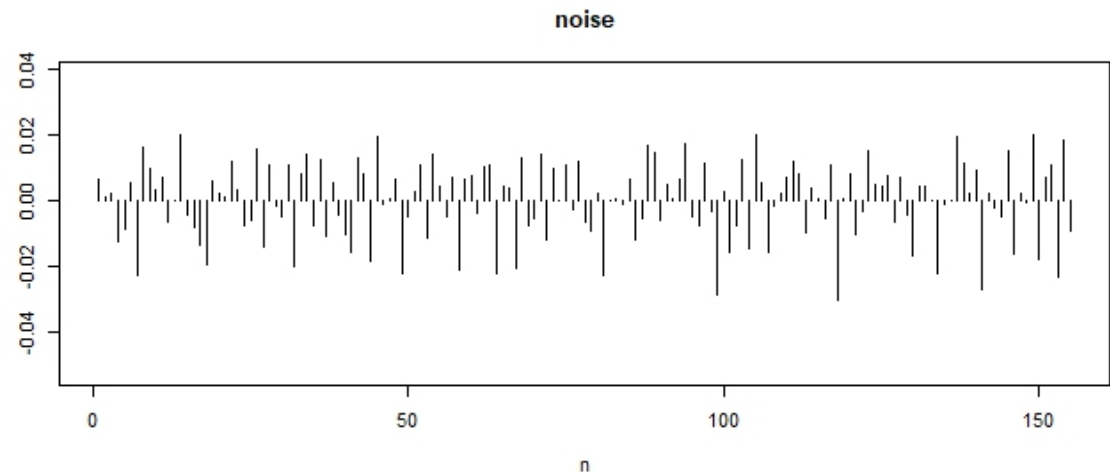
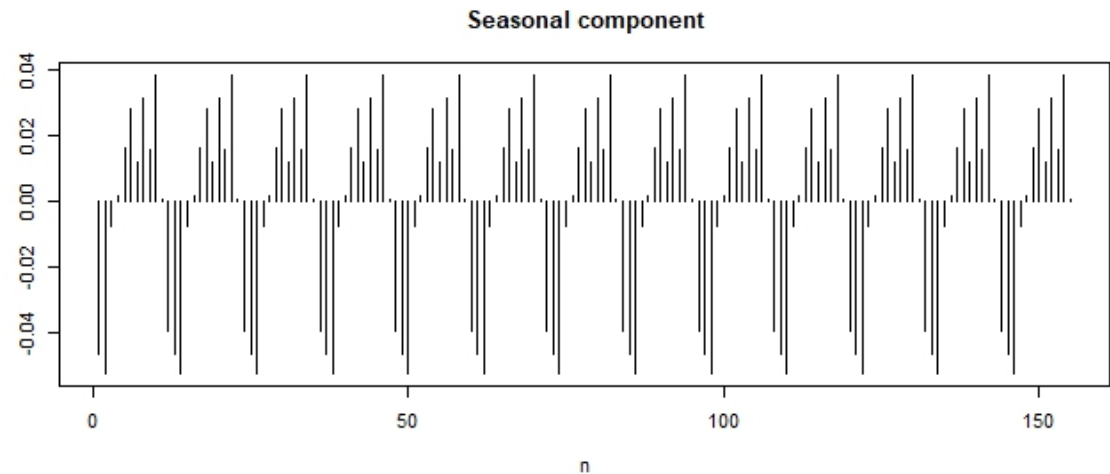
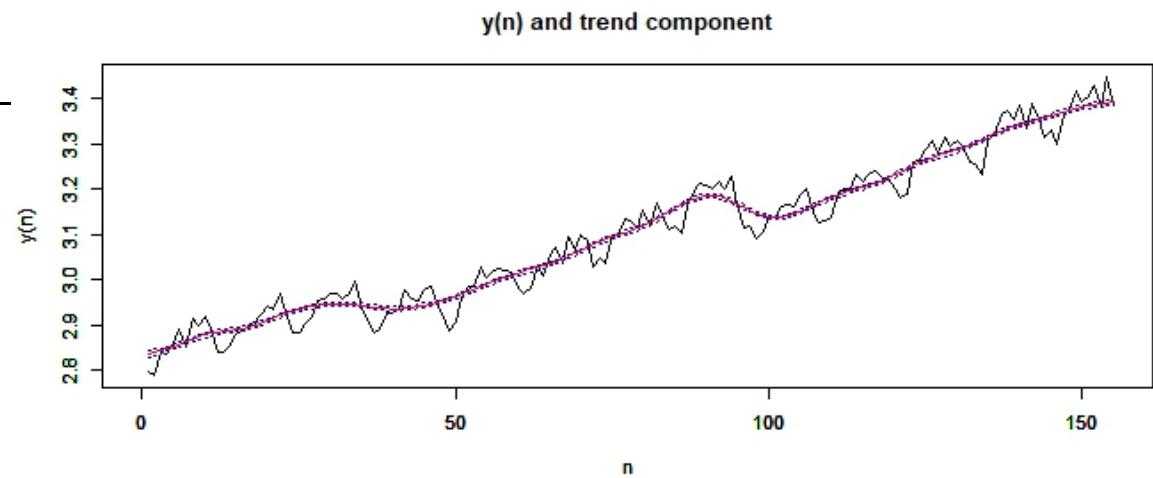
`season(Whard, 2, 1, 0, 6, year=1967, log=TRUE)`

\$tau2 [1] 1.269665e-01 1.100012e-08

\$sigma2 [1] 5.774088e-05

\$lkhood [1] 358.2322

\$aic [1] -674.4645



曜日効果の検出

$$y_n = t_n + s_n + td_n + w_n$$

曜日効果項

$$td_n = \beta_1 d_{n,1} + \cdots + \beta_7 d_{n,7}$$

$d_{n,j}$ 第 n 月中の j 番目の曜日の数

$d_{n,j}$	日	月	火	水	木	金	土
J	4	5	5	5	4	4	4
F	4	4	4	4	4	4	4
M	4	4	4	4	5	5	5
A	5	5	4	4	4	4	4
M	4	4	5	5	5	4	4
J	4	4	4	4	4	5	5
J	5	5	5	4	4	4	4

$$\beta_1 + \cdots + \beta_7 = 0$$

$$\begin{aligned} td_n &= \beta_1 d_{n,1} + \cdots + \beta_6 d_{n,6} - (\beta_1 + \cdots + \beta_6) d_{n,7} \\ &= \beta_1 (d_{n,1} - d_{n,7}) + \cdots + \beta_6 (d_{n,6} - d_{n,7}) \end{aligned}$$

季節調整モデル(一般形)

$$y_n = t_n + s_n + p_n + td_n + r_n + w_n$$

t_n トレンド p_n 定常変動 r_n 外生変数

s_n 季節成分 td_n 曜日効果 w_n ノイズ

成分モデル

$$\Delta^k t_n = v_{1n}$$

$$s_n = -(s_{n-1} + \cdots + s_{n-p+1}) + v_{2n}$$

$$p_n = a_1 p_{n-1} + \cdots + a_m p_{n-m} + v_{3n}$$

$$td_n = \beta_1 d_{n1} + \cdots + \beta_{7n} d_{n7}$$

状態空間表現

$$x_n = Fx_{n-1} + Gv_n$$

$$y_n = Hx_n + w_n$$

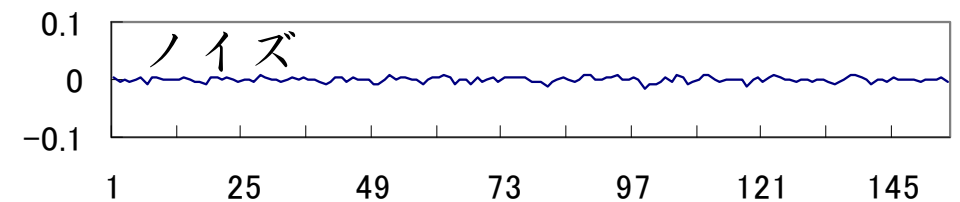
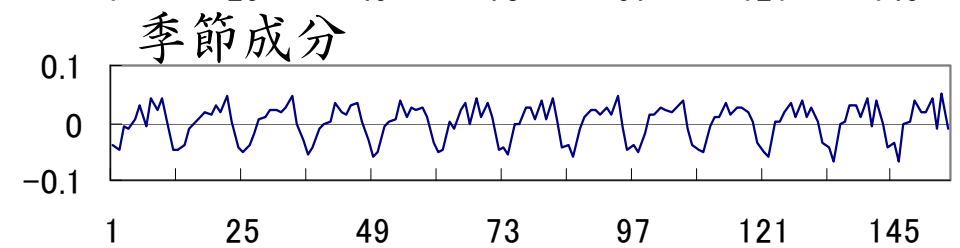
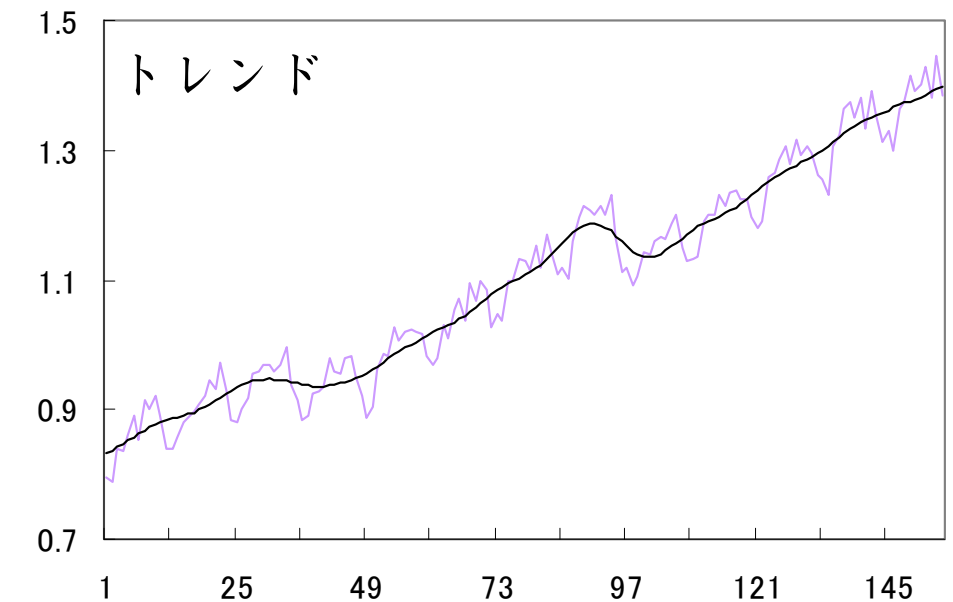
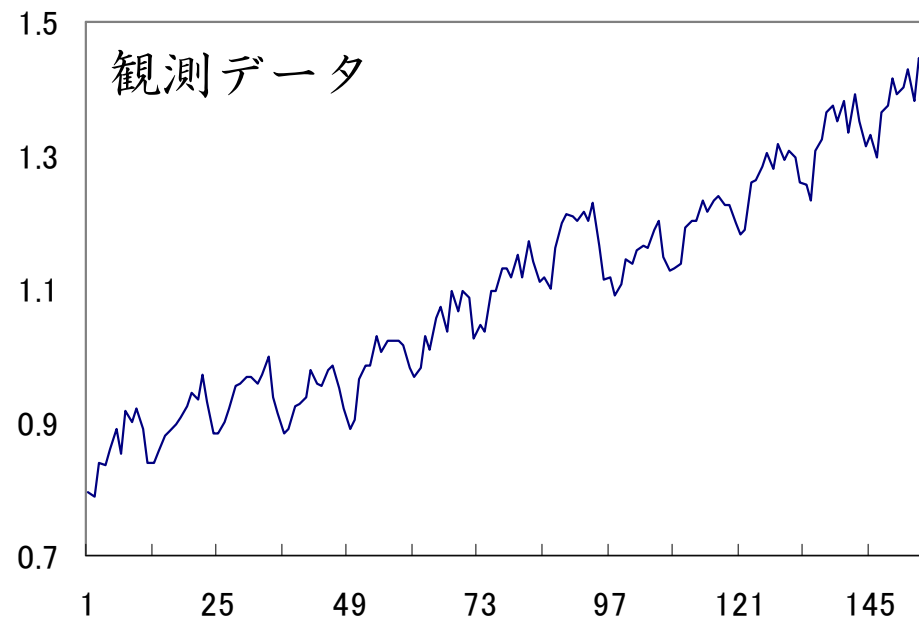
曜日効果を含む季節調整モデルの状態空間表現

$k=2, p=4, ar=0, trade=6$ の場合

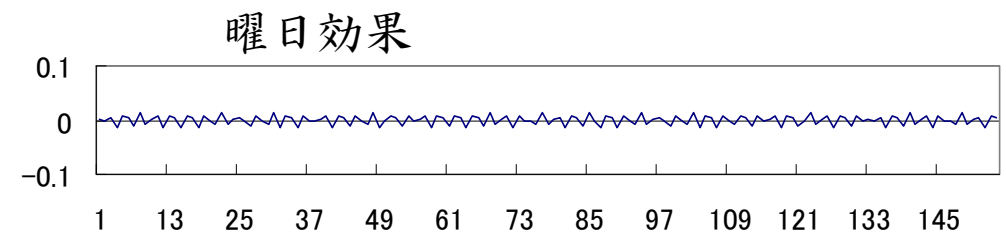
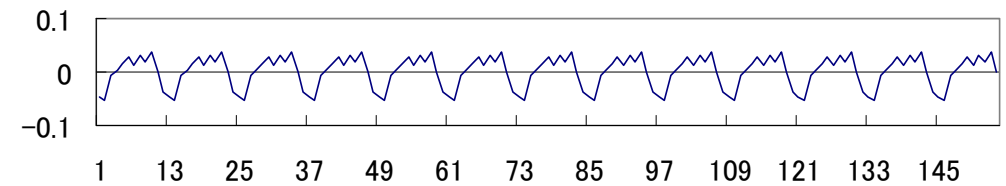
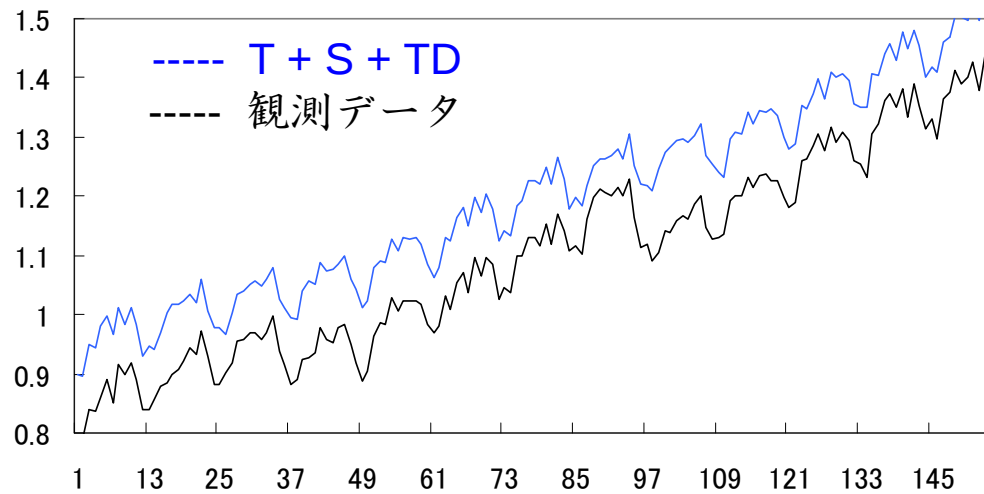
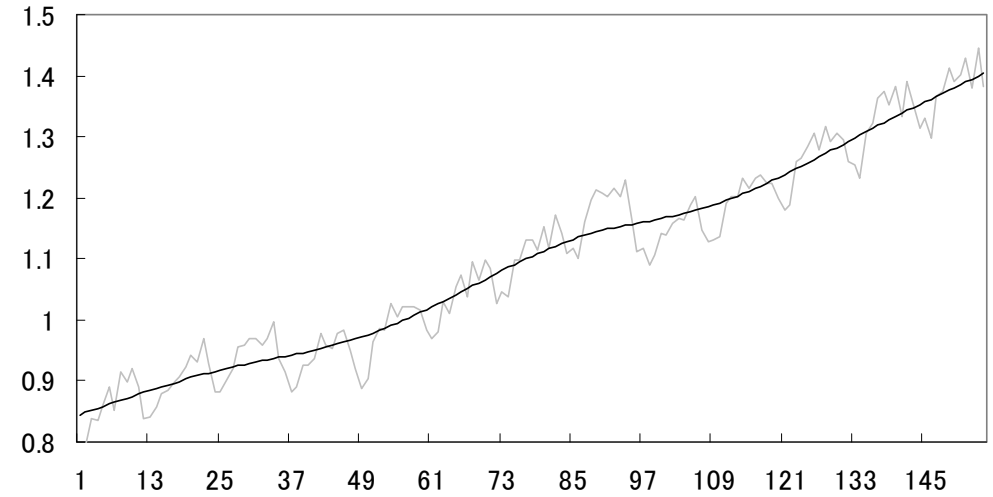
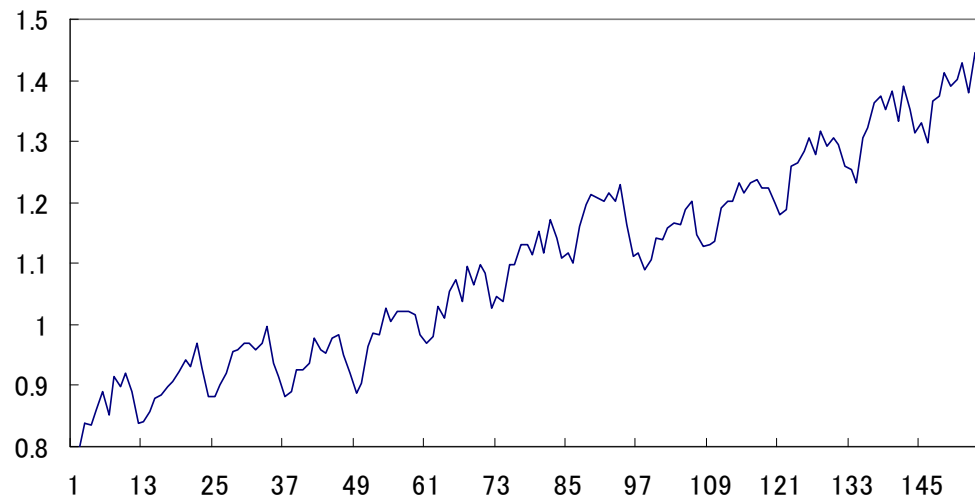
$$F = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|ccc} 2 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ \hline & & -1 & -1 & -1 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1 \end{array} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_n = \begin{bmatrix} t_n \\ t_{n-1} \\ \hline S_n \\ S_{n-1} \\ S_{n-2} \\ \hline \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_6 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & d_1^* & \cdots & d_6^* \end{bmatrix}, \quad d_j^* = d_j - d_7$$

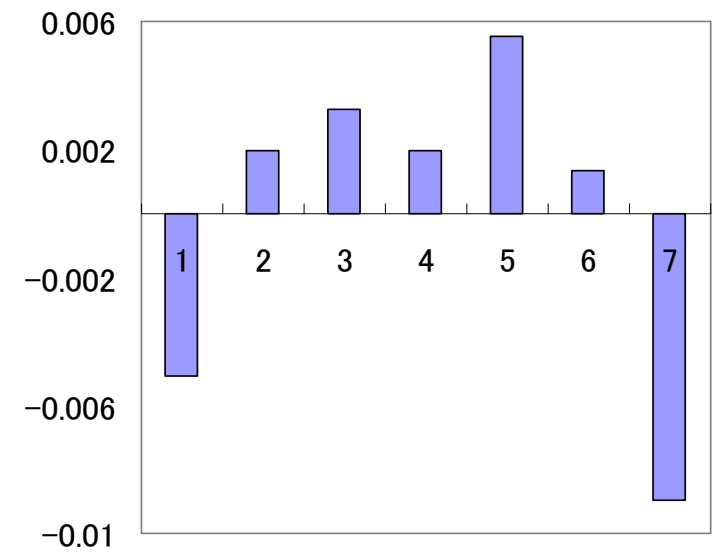
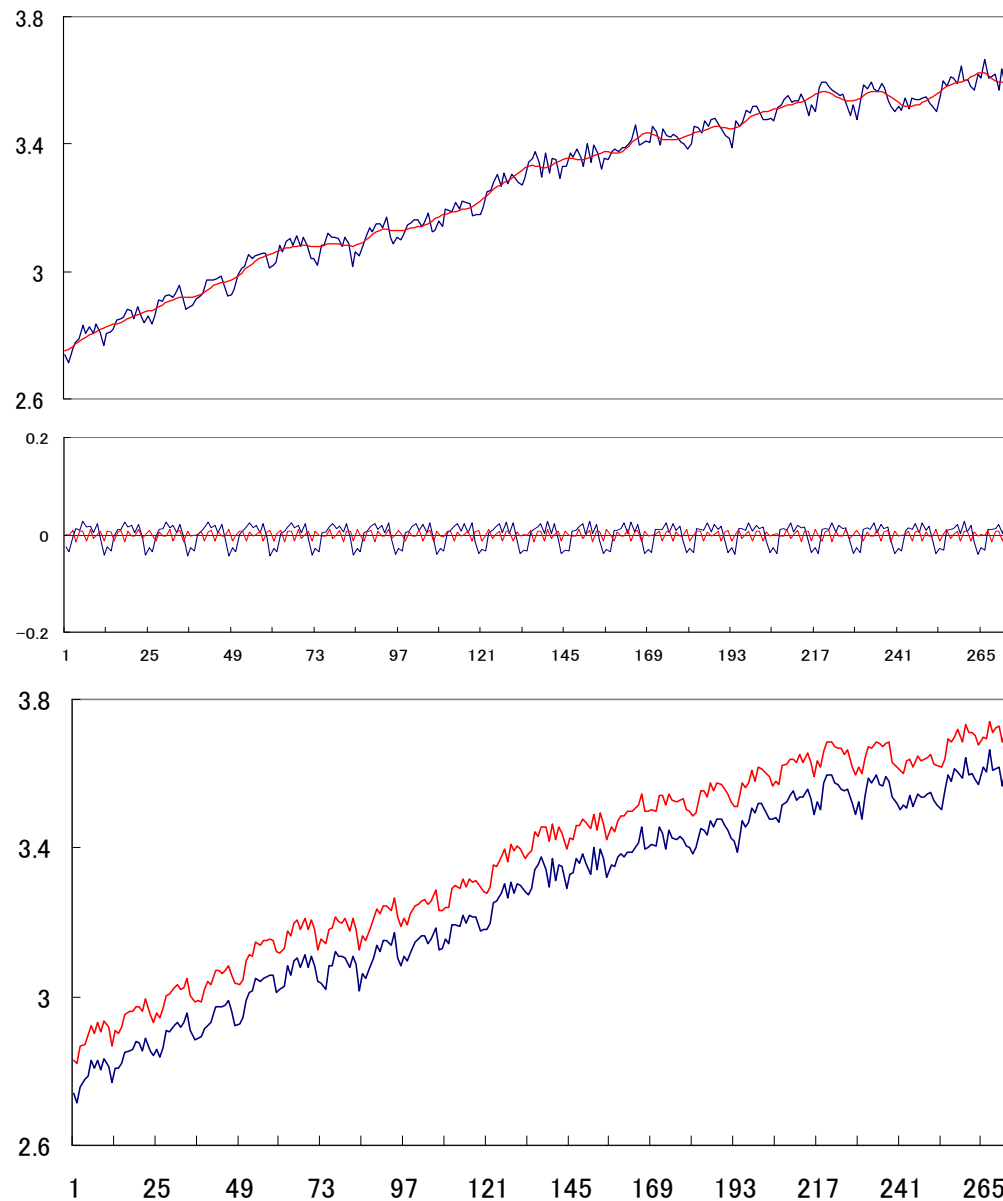
曜日調整なし



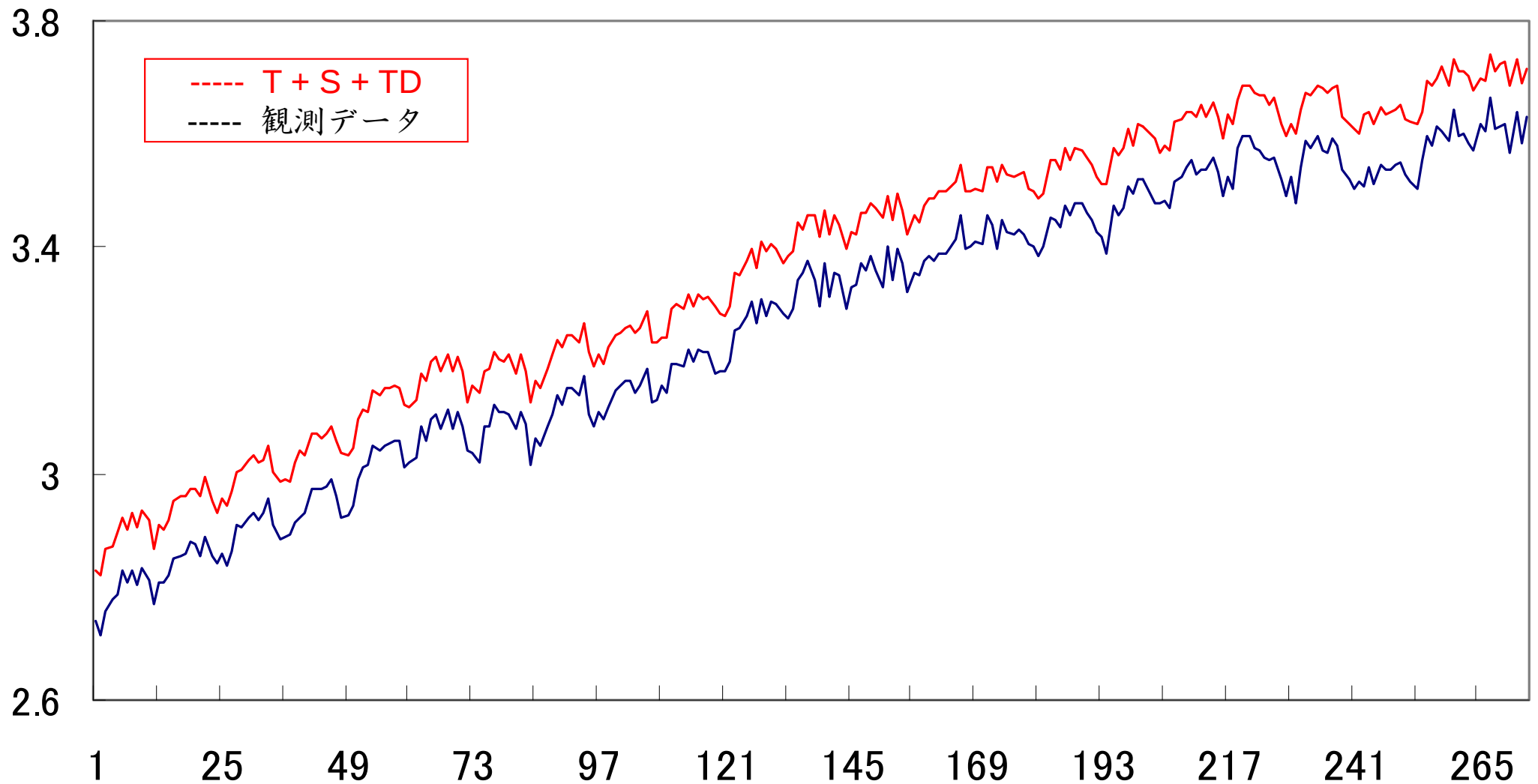
曜日調整つき



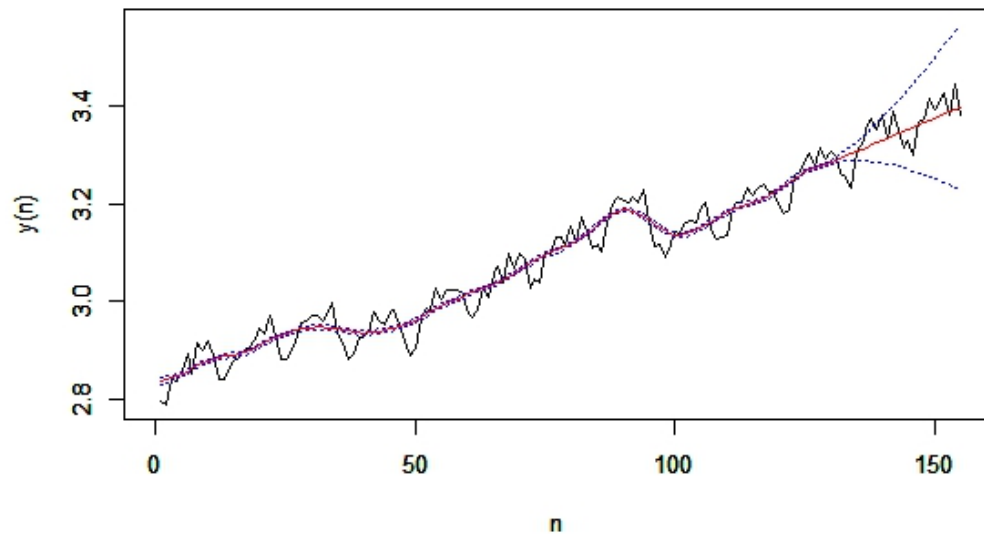
曜日効果パターン



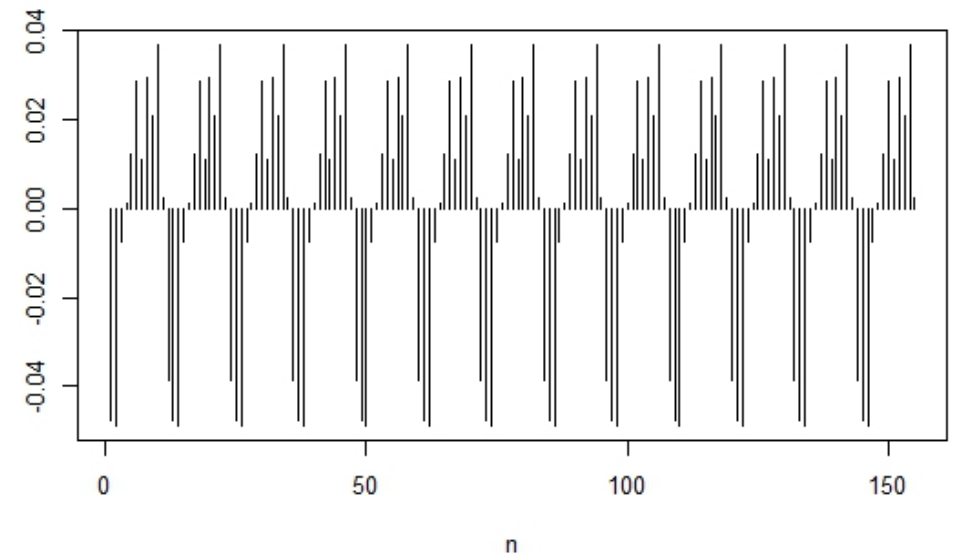
曜日調整つき季節調整



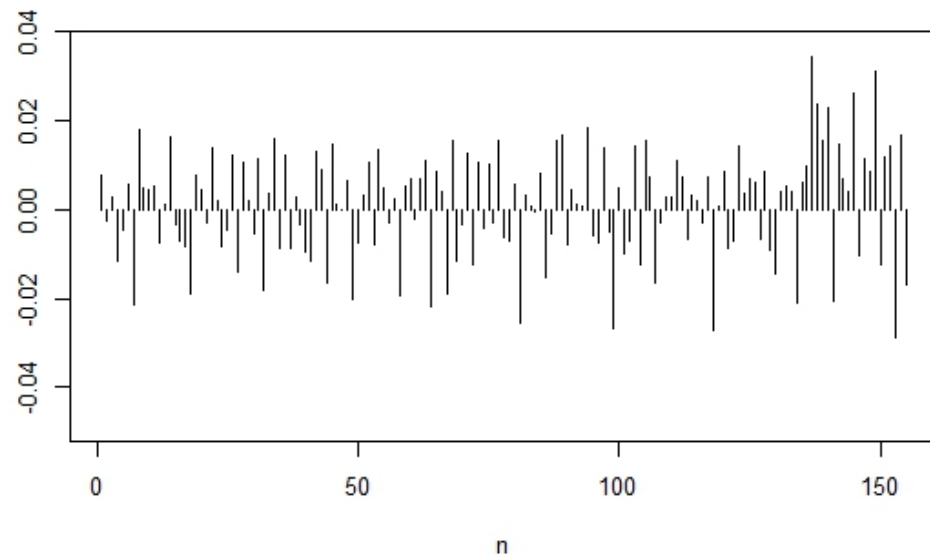
y(n) and trend component



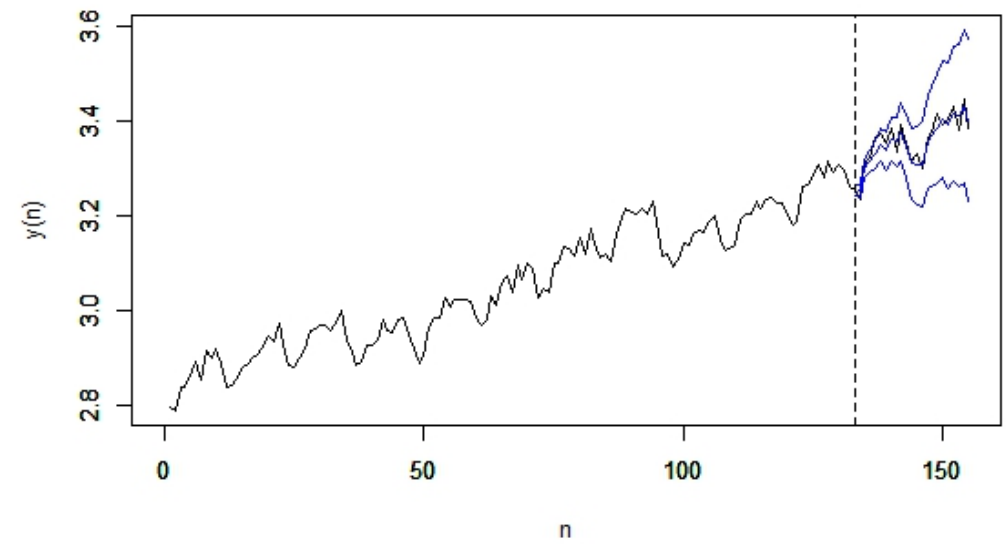
Seasonal component



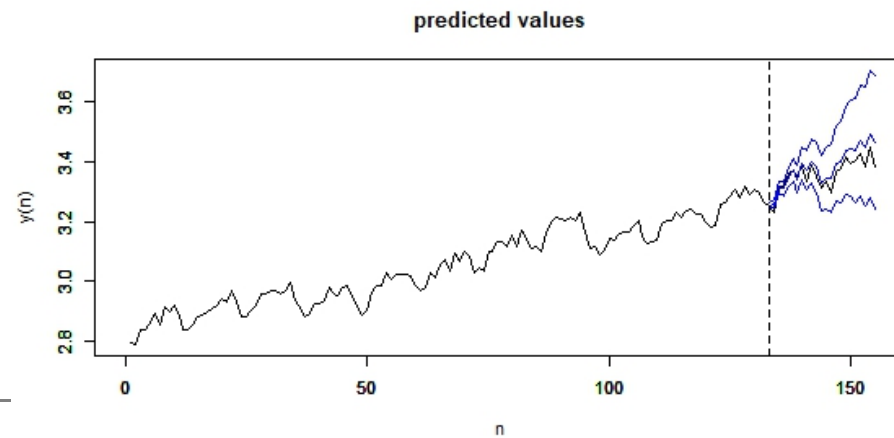
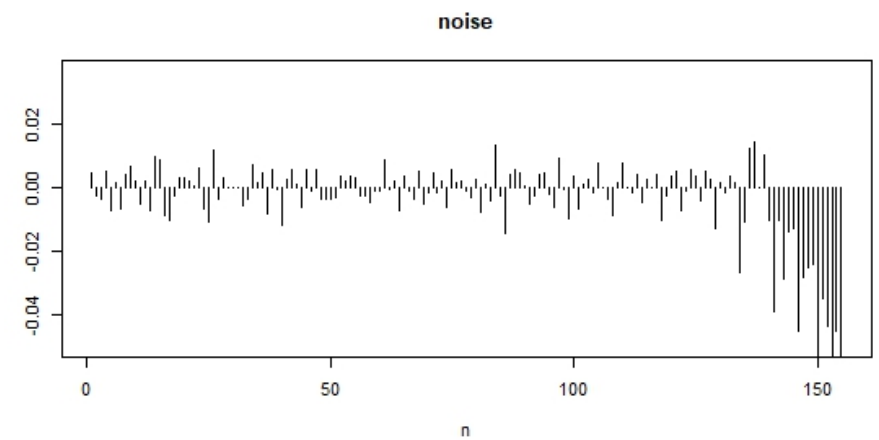
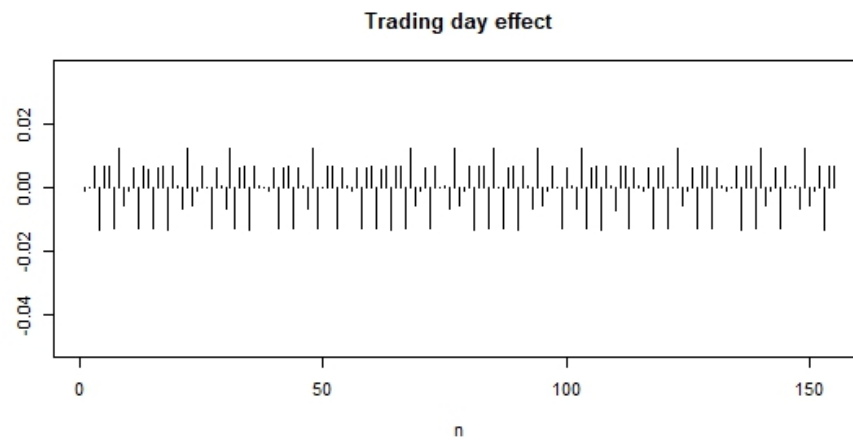
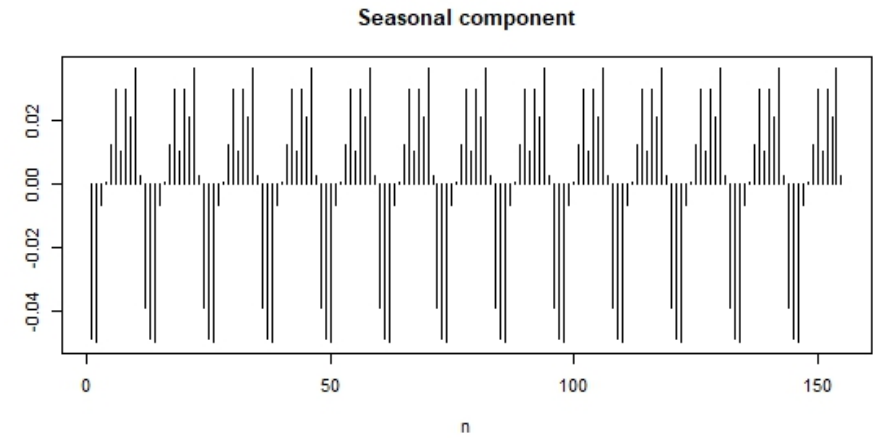
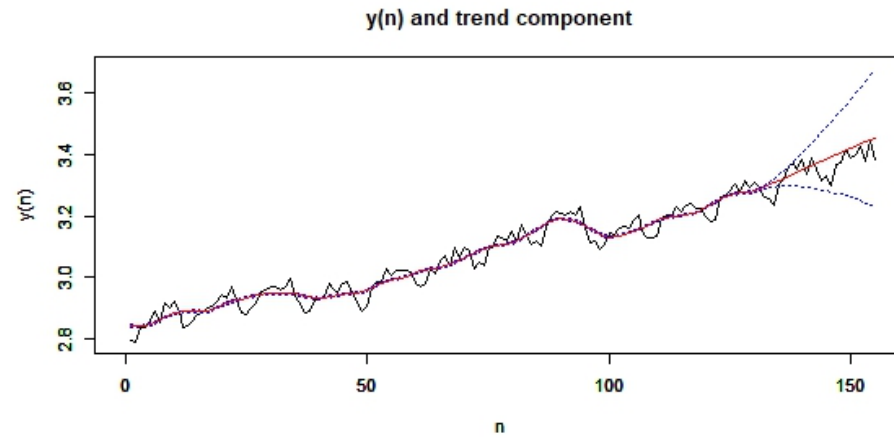
noise



predicted values

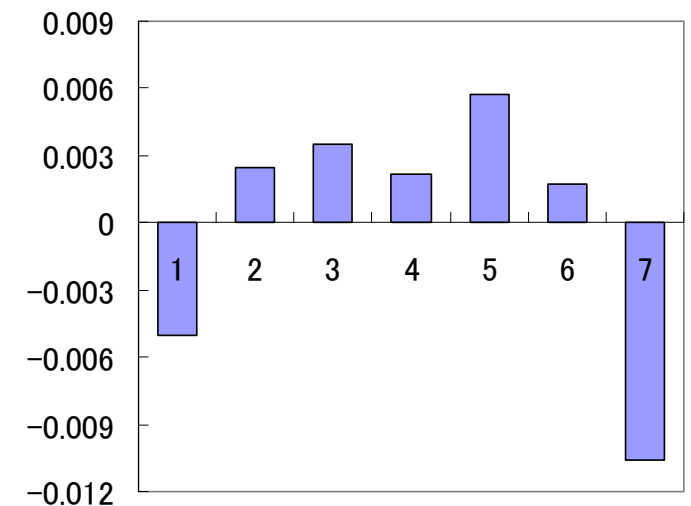
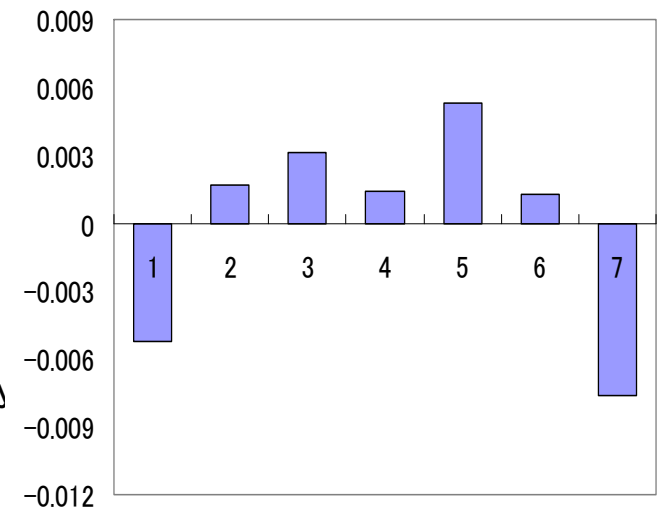
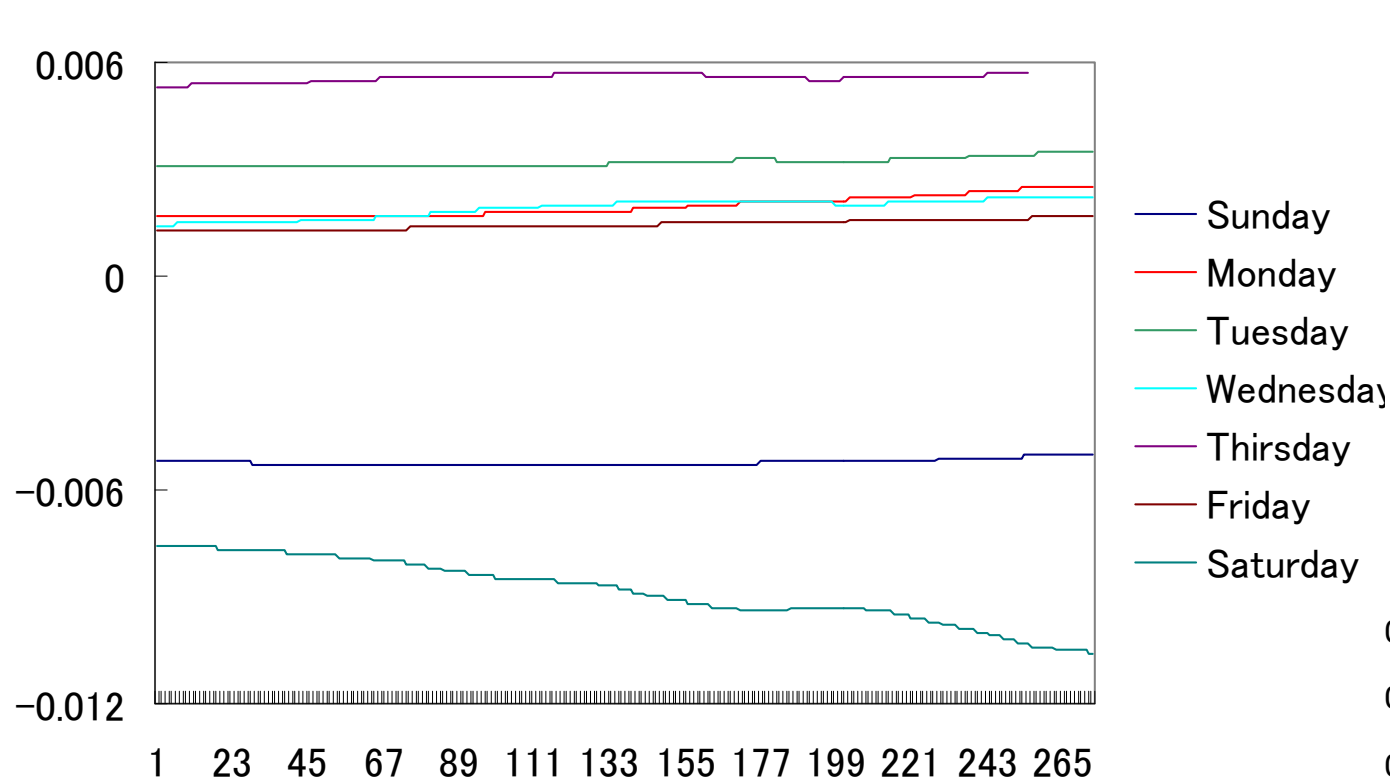


```
data(Whard) # Wholesale hardware data
season(Whard, 2, 1, 0, 6, year=1967, log=TRUE)
```



曜日効果の時間変化の検出

(曜日効果を時変係数にする)



$$\beta_{jn} = \beta_{j,n-1} + \varepsilon_{jn}$$

制約モデルの導入

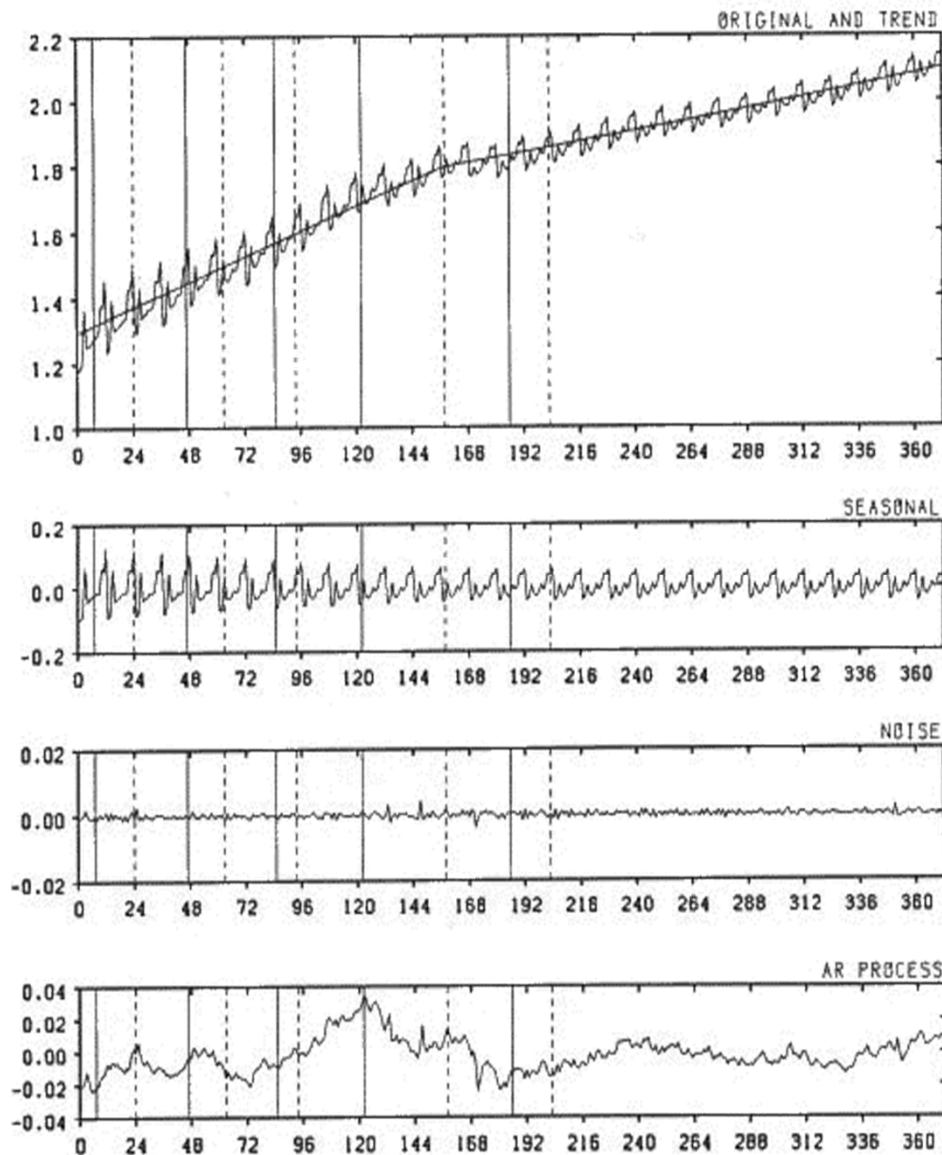
土日と平日だけのモデル

$$\beta_1 = \beta_7, \quad \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6$$

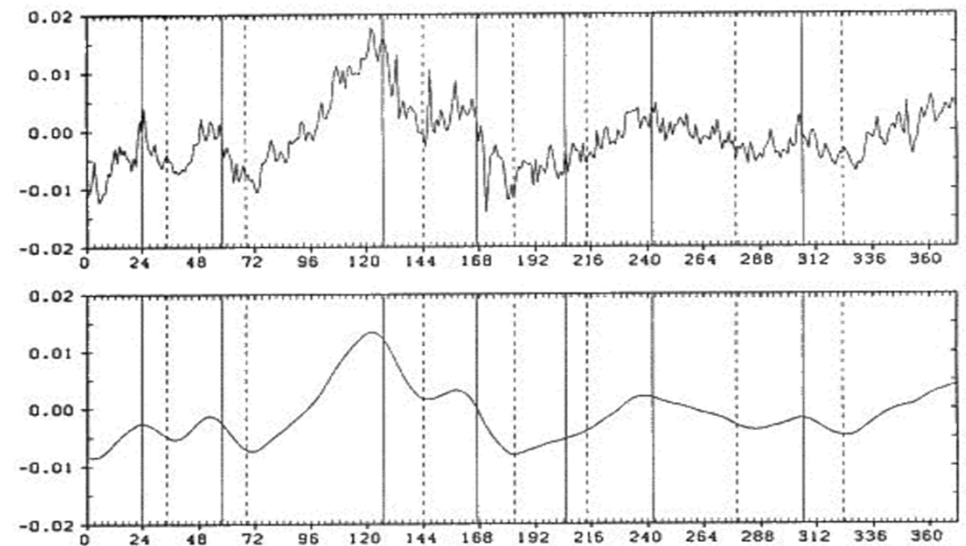
$$2\beta_1 + 5\beta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = -\frac{2}{5}\beta_1 \quad (\text{自由パラメータは1個})$$

景気動向の推定

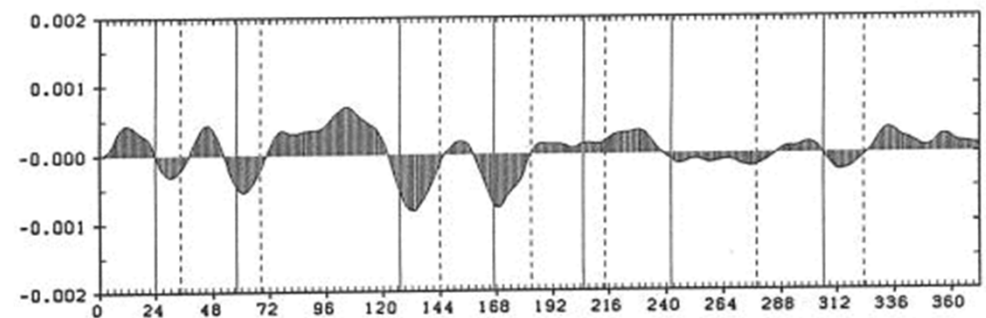
GDP系列の季節調整



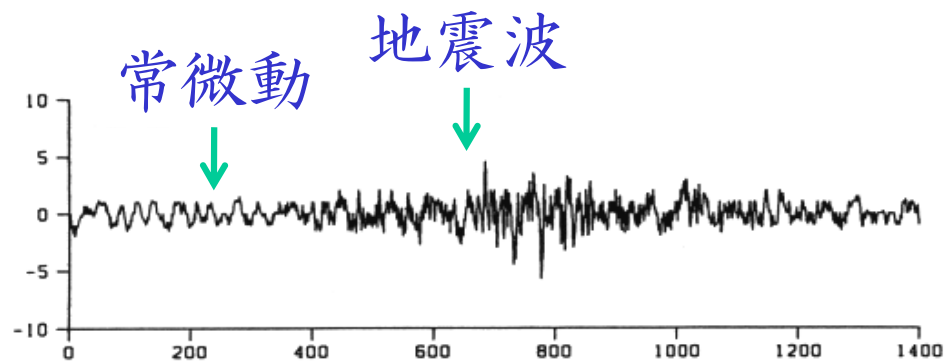
GDP系列のCycle



Cycleの階差



低S/Nデータからの信号抽出



観測モデル

$$y_n = r_n + s_n + w_n$$

r_n 常微動

s_n 地震波

w_n 観測ノイズ

成分モデル

$$r_n = \sum_{j=1}^m a_j r_{n-j} + u_n$$

$$s_n = \sum_{j=1}^{\ell} b_j s_{n-j} + v_n$$

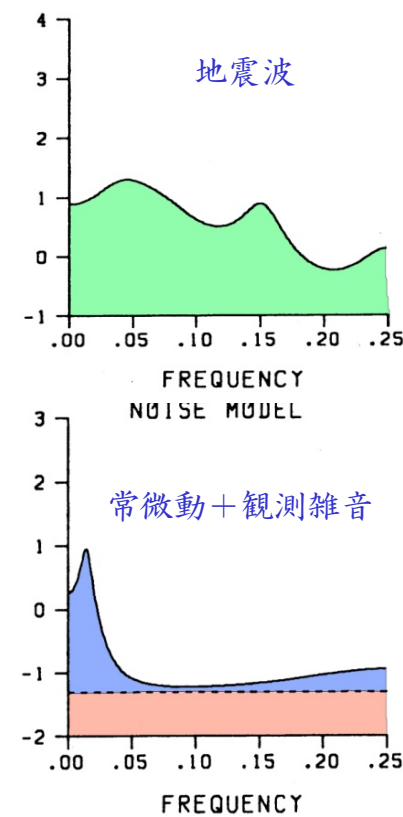
$$u_n \sim N(0, \tau_1^2)$$

$$v_n \sim N(0, \tau_2^2)$$

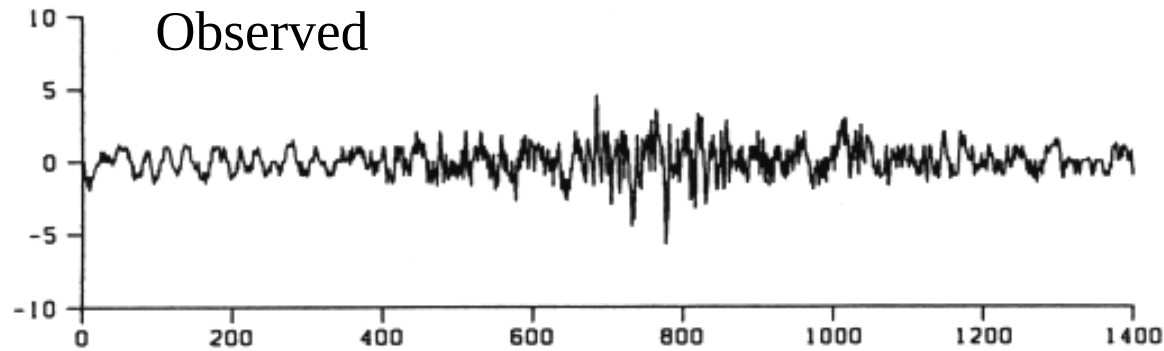
$$w_n \sim N(0, \sigma^2)$$

$$x_n = F x_{n-1} + G w_n$$

$$y_n = H x_n + \varepsilon_n$$



微小地震の抽出



$$y_n = r_n + s_n + w_n$$

r_n 常微動 (背景雑音)

s_n 地震波

w_n 観測ノイズ

観測モデル

$$y_n = r_n + s_n + w_n$$

r_n 常微動

s_n 地震波

w_n 観測ノイズ

成分モデル

$$r_n = \sum_{j=1}^m a_j r_{n-j} + u_n$$

$$s_n = \sum_{j=1}^l b_j s_{n-j} + v_n$$

$$u_n \sim N(0, \tau_1^2)$$

$$v_n \sim N(0, \tau_2^2)$$

$$w_n \sim N(0, \sigma^2)$$

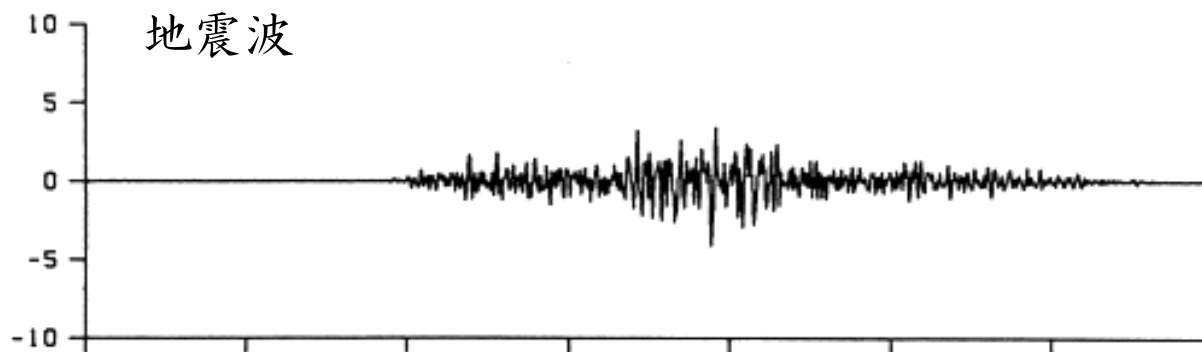
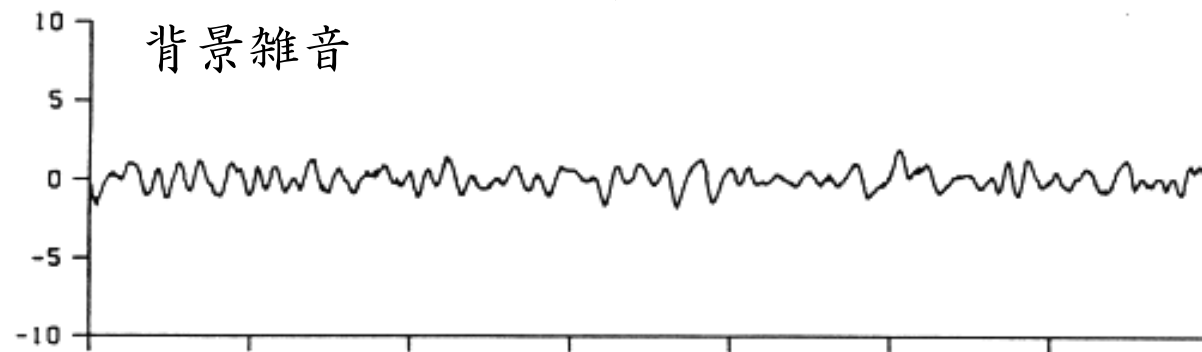
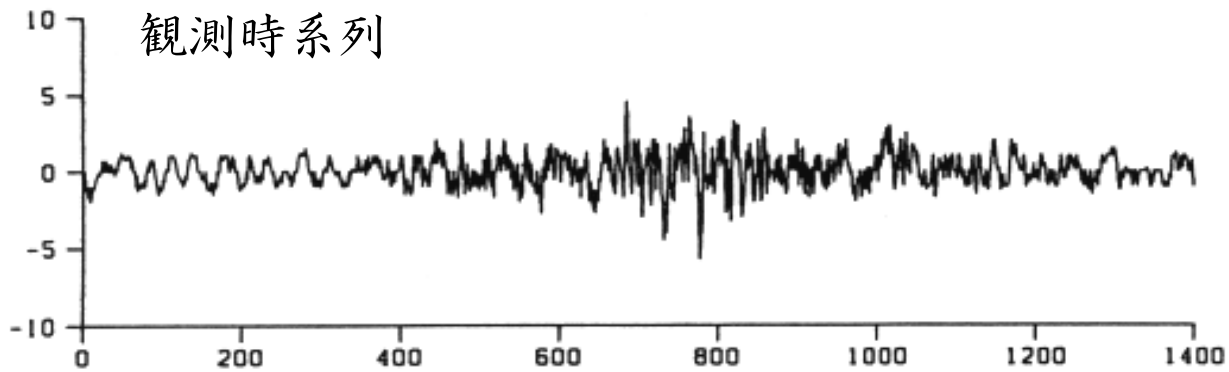
状態空間モデル

$$\begin{aligned} x_n &= F x_{n-1} + G w_n \\ y_n &= H x_n + \varepsilon_n \end{aligned}$$

$$x_n = \begin{bmatrix} r_n \\ r_{n-1} \\ \vdots \\ r_{n-m+1} \\ s_n \\ s_{n-1} \\ \vdots \\ s_{n-l+1} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & & & \\ 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & b_1 & b_2 & \cdots & b_l \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

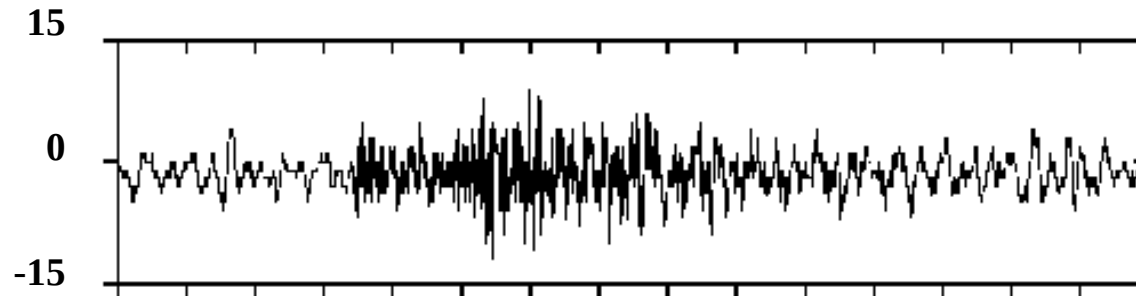
$$H = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0], \quad Q_n = \begin{bmatrix} \tau_1^2 & 0 \\ 0 & \tau_2^2 \end{bmatrix}, \quad R_n = \sigma^2$$

微小信号の抽出

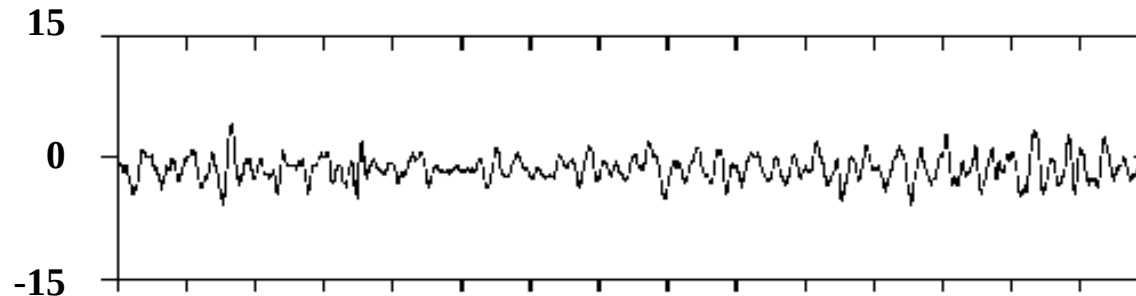


微小地震波の抽出

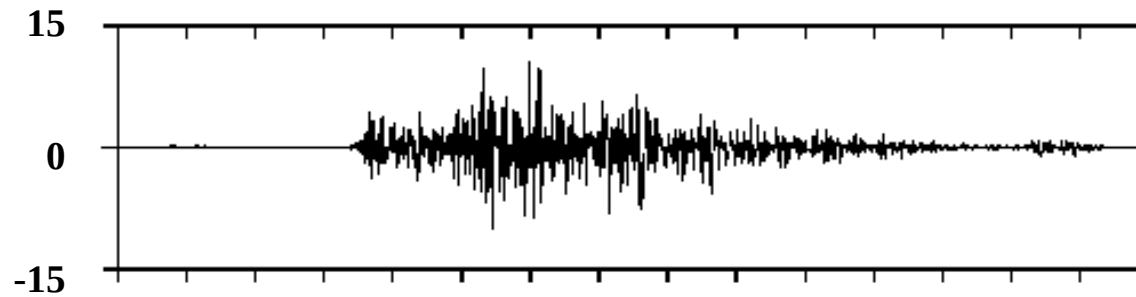
観測データ



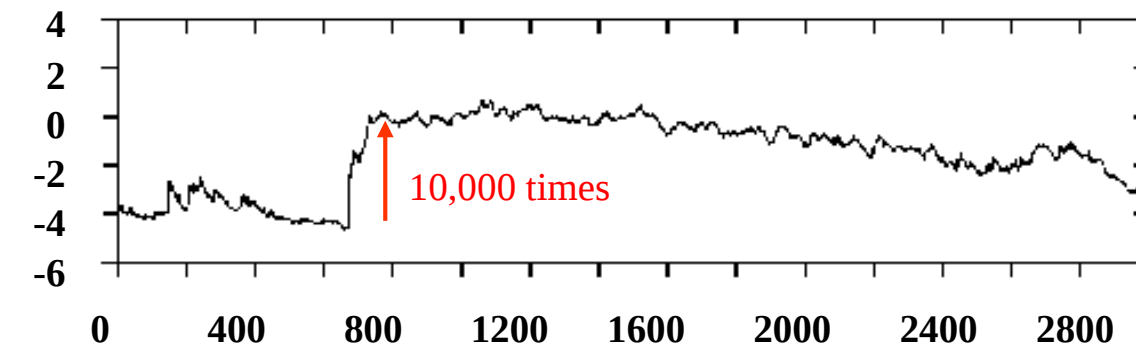
常微動



地震波

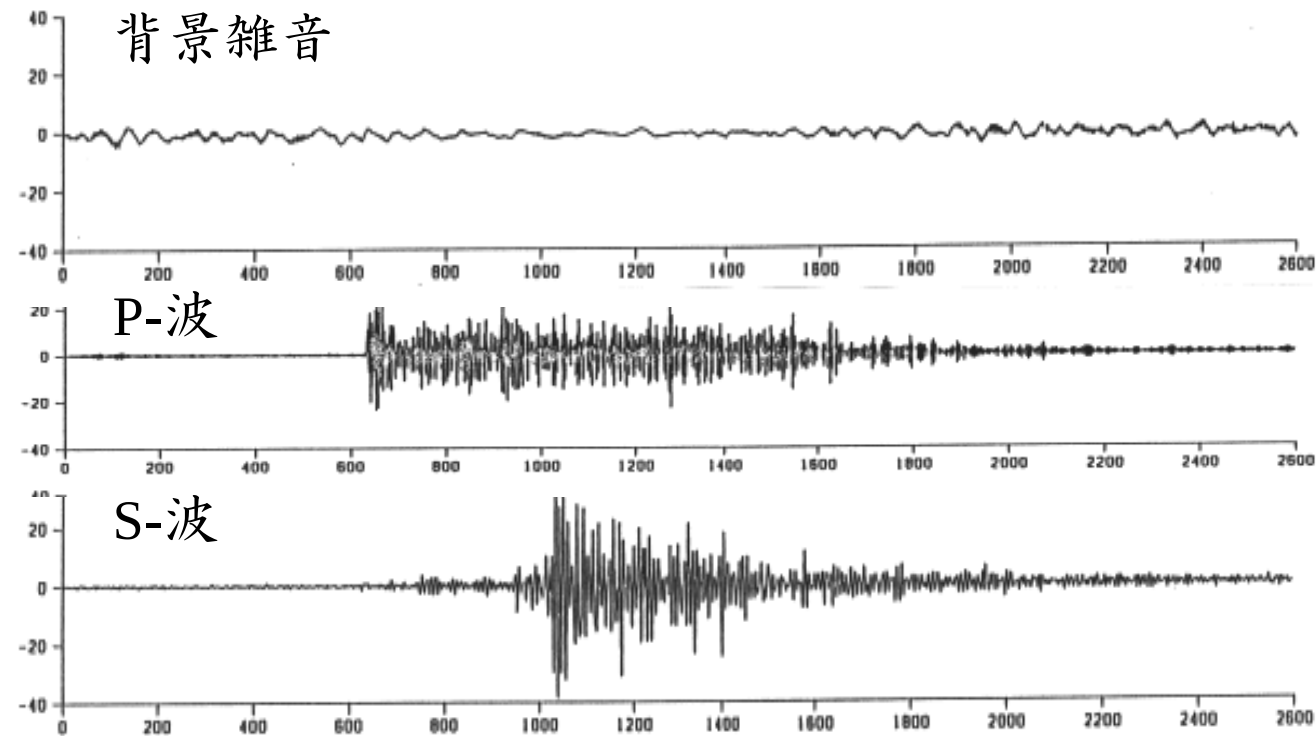
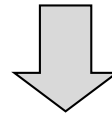
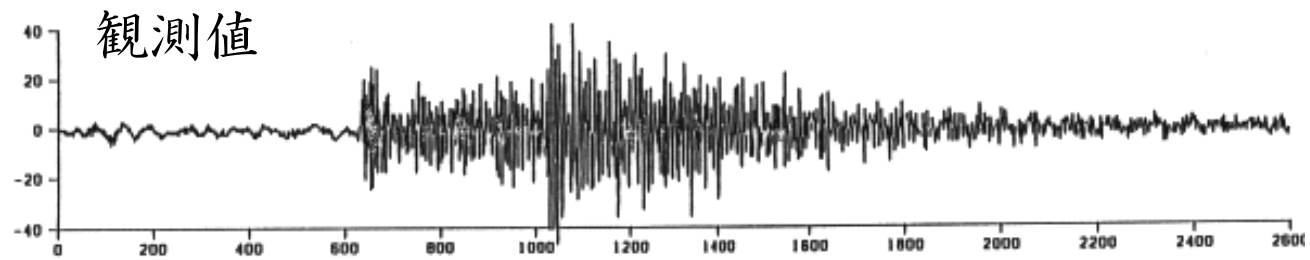


時変分散
(in $\log_{10}$)

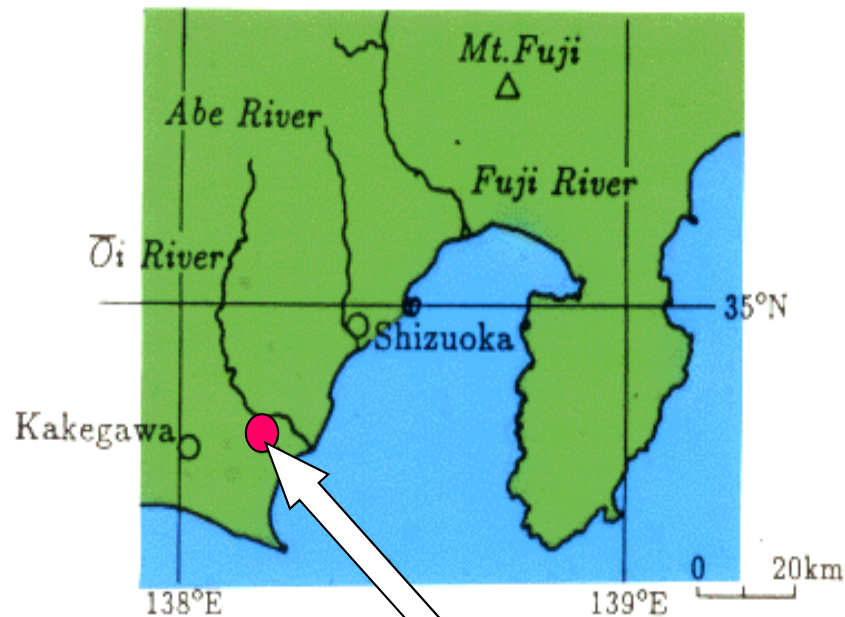


実用化には自己組織型
状態空間モデルを利用

P-波と S-波の分離



地下水位データ (地震の影響の抽出)

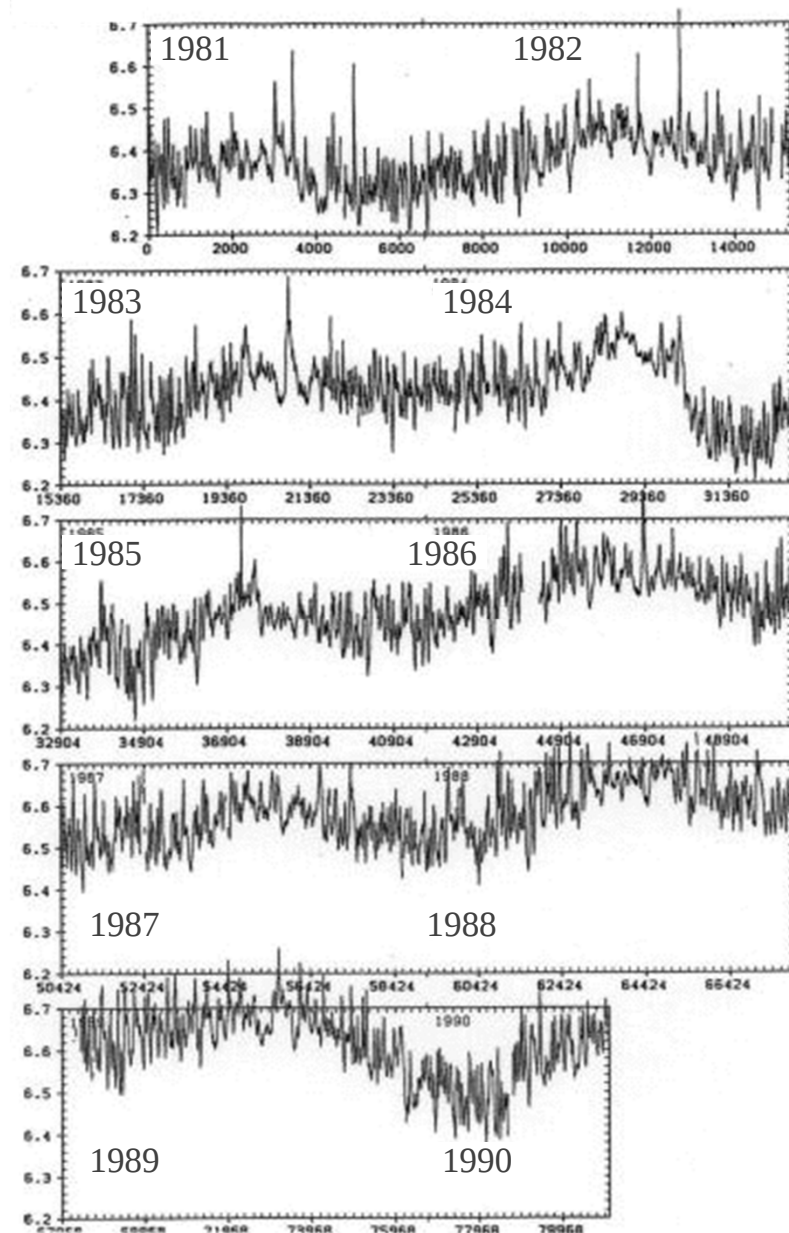


産総研観測井

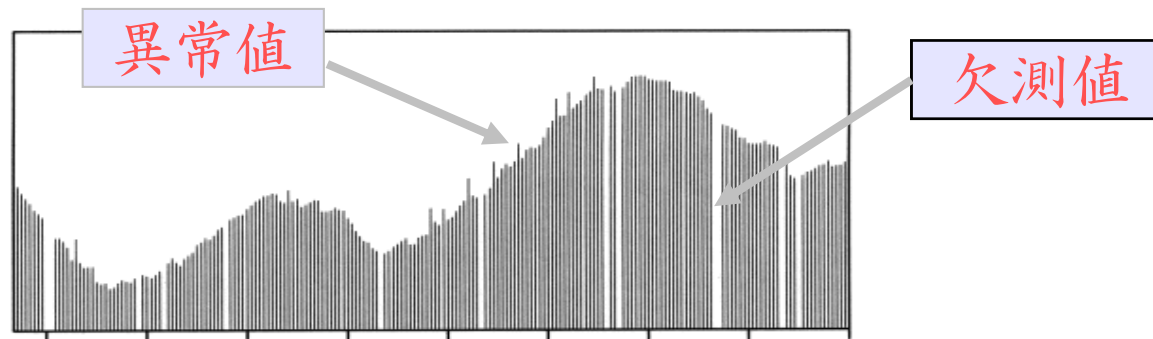
気圧，地球潮汐，降雨
などの影響を受ける



地震の影響の検出が困難



欠測値と異常値の処理



状態空間モデル

$$t_n = t_{n-1} + v_n$$

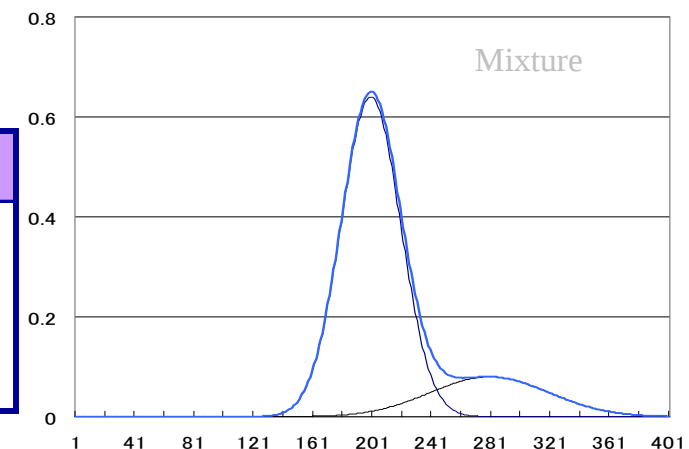
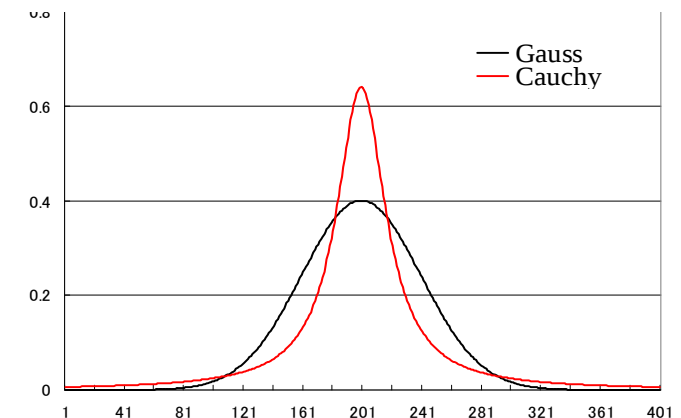
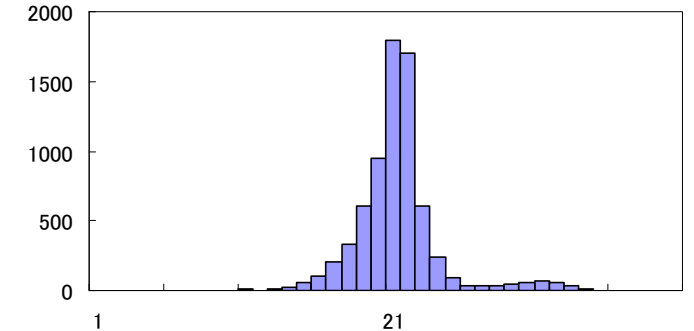
$$y_n = t_n + w_n$$

y_n : Observation
 t_n : Signal
 v_n : System Noise
 w_n : Observation Noise

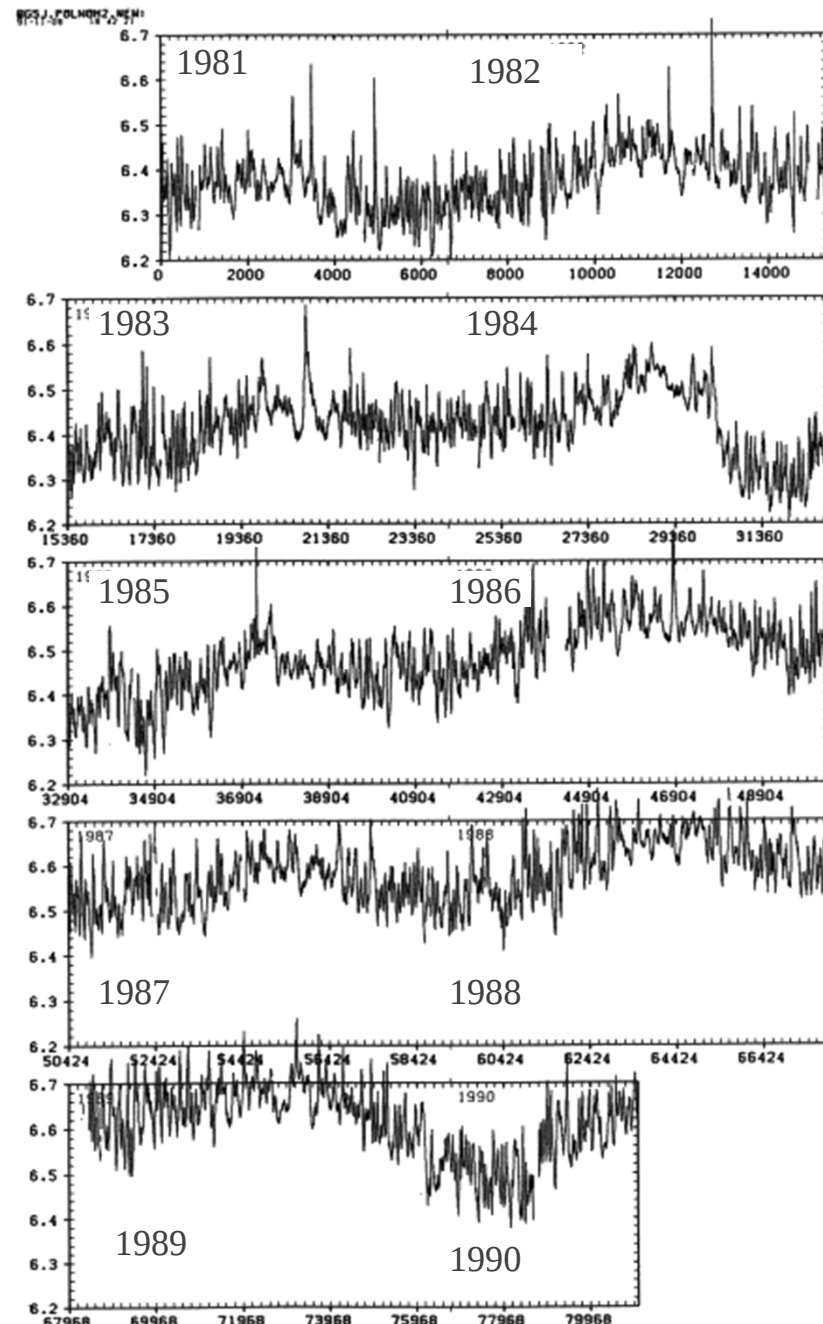
観測ノイズのモデル

Gauss $r(w) \sim N(0, \sigma^2)$
 Cauchy $r(w) = \frac{\sigma}{\pi(w^2 + \sigma^2)}$
 Mixture $r(w) \sim (1 - \alpha)N(0, \sigma^2) + \alpha N(\mu, \zeta^2)$

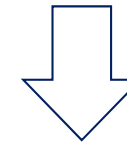
Model	AIC
Gauss	-8741
Cauchy	-8655
Mixture	-8936



観測データ



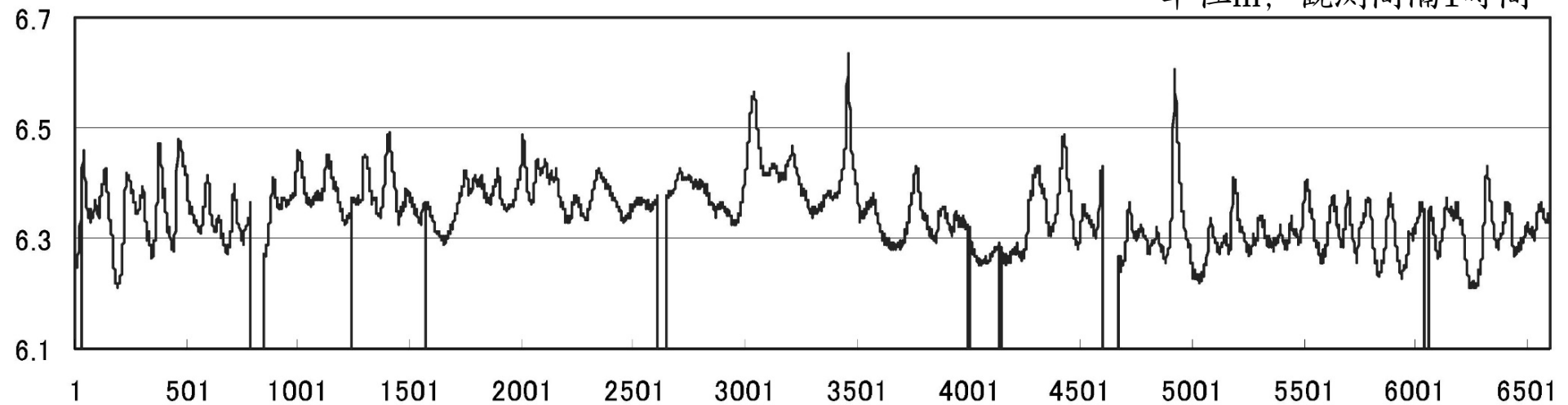
トレンド周りに強い変動成分が存在



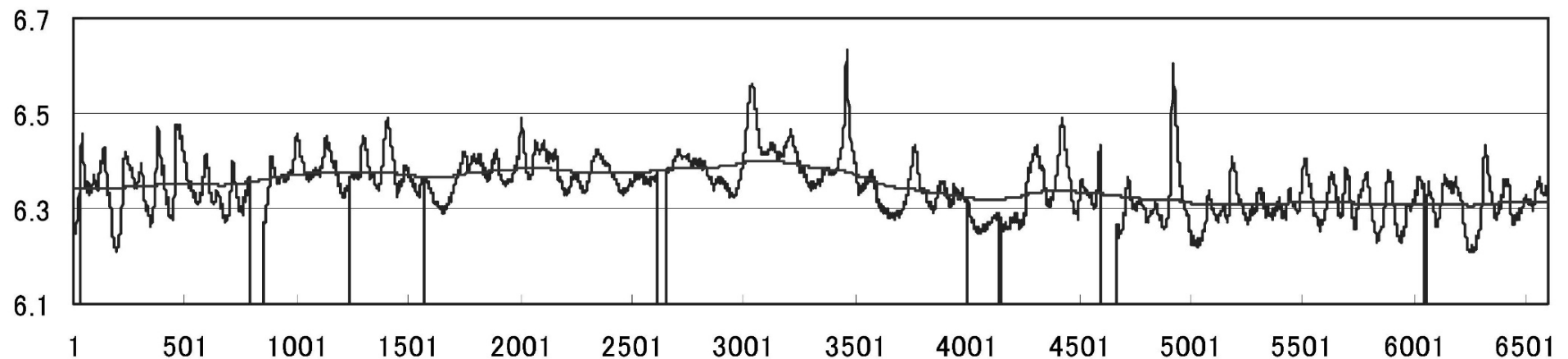
地震の影響の検出が困難

地下水位データ（産総研・榛原）

単位m, 観測間隔1時間

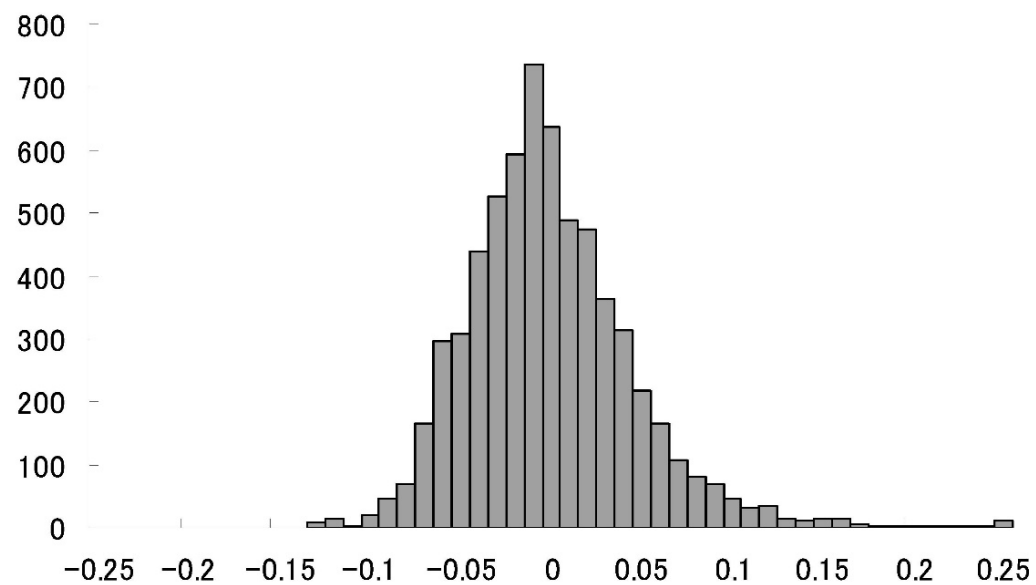


地下水位データとトレンド

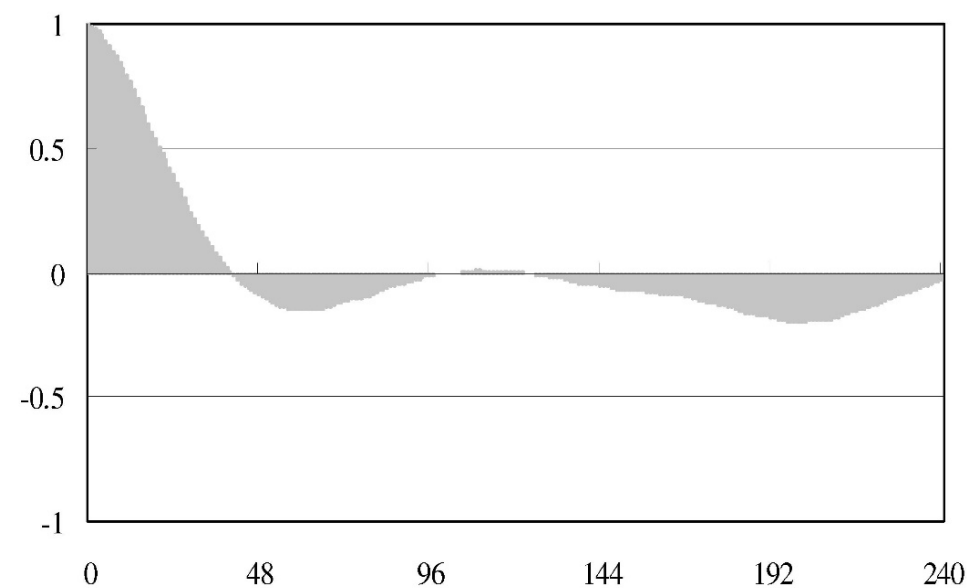


トレンドから何かわかるか？

残差系列のヒストグラム



残差系列の自己相関関数



気圧効果モデル

$$y_n = t_n + P_n + \varepsilon_n$$

y_n 観測値
 t_n トレンド
 P_n 気圧効果
 ε_n 観測ノイズ

成分モデル

$$t_n = t_{n-1} + w_n$$

$$P_n = \sum_{i=0}^m a_i p_{n-i}$$

状態空間モデル

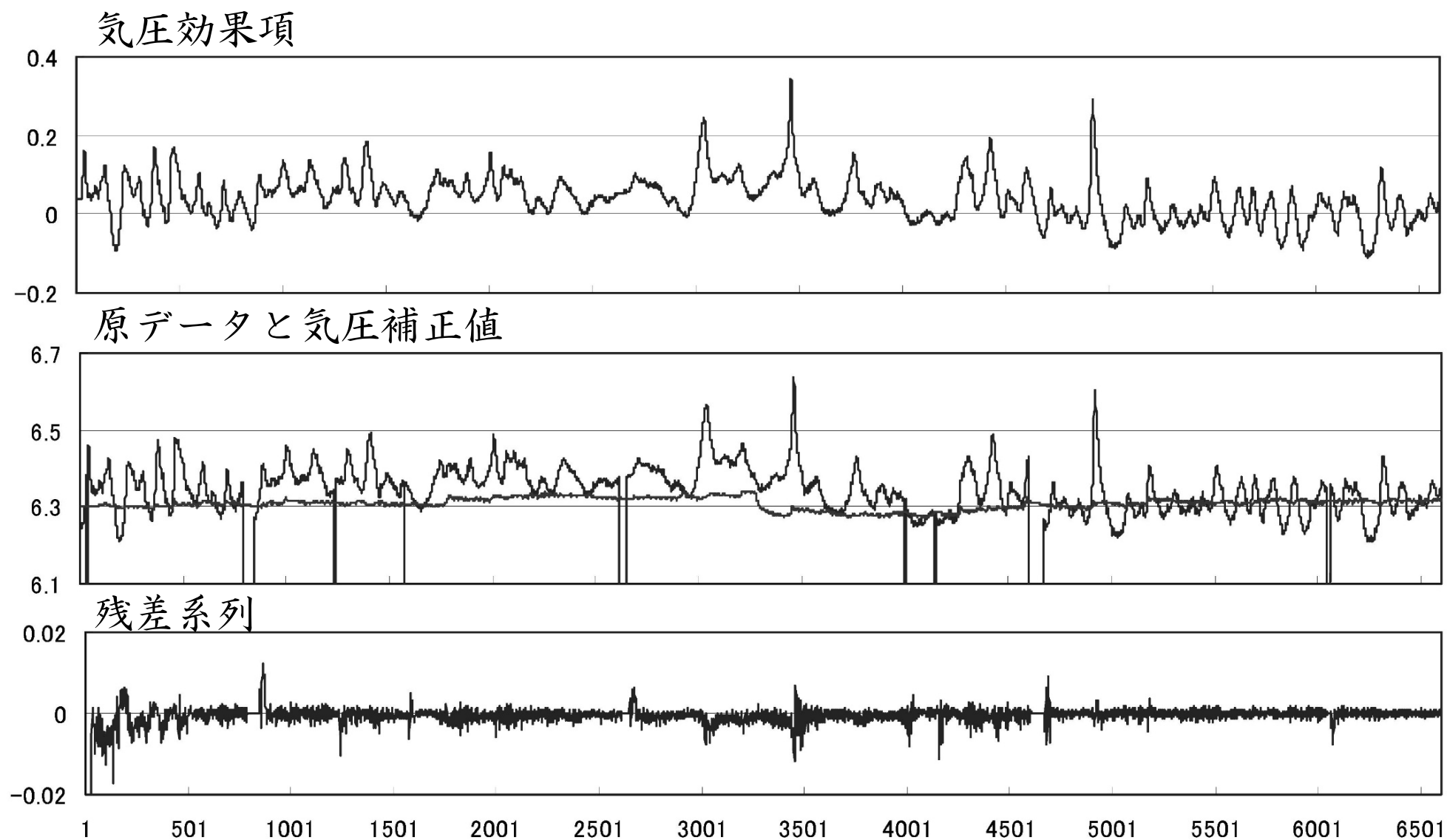
$$x_n = Fx_{n-1} + Gv_n$$

$$y_n = Hx_n + w_n$$

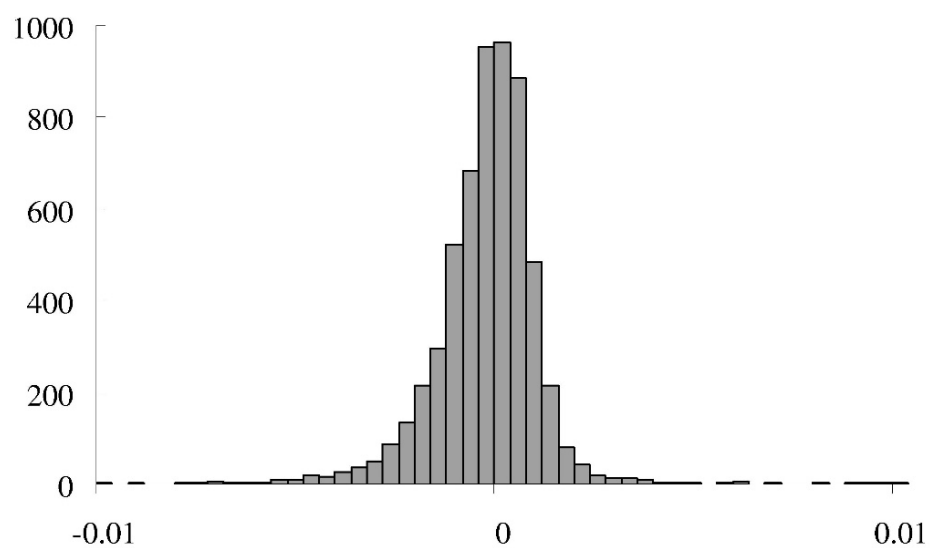
$$x_n = \begin{bmatrix} t_n \\ a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = [1 \quad p_n \quad \cdots \quad p_{n-m}]$$

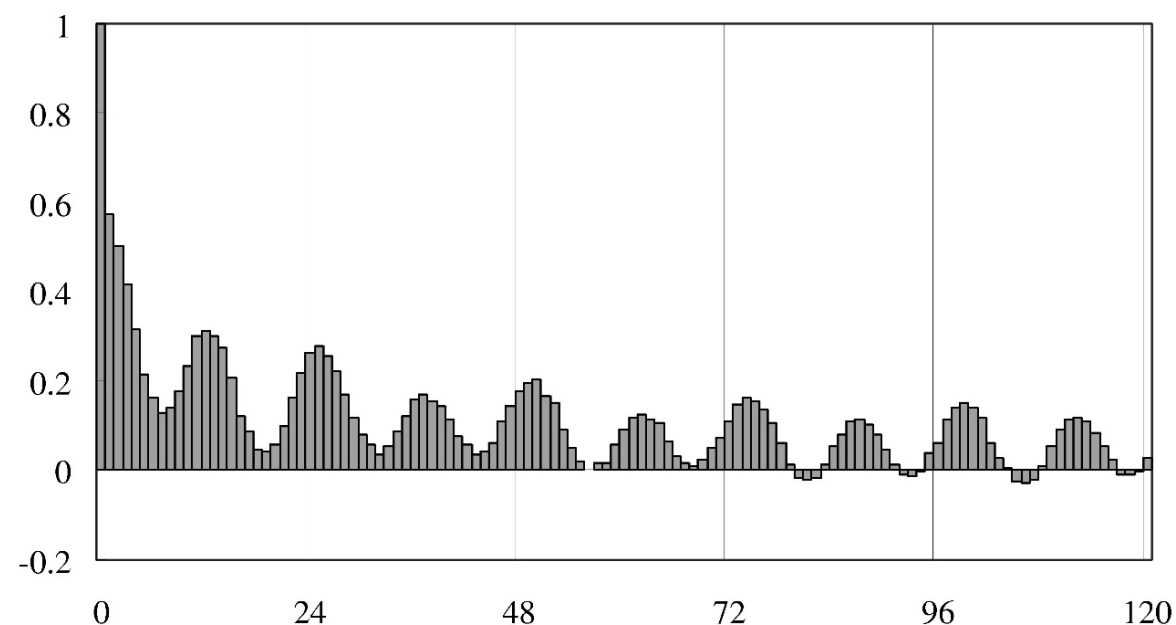
モデル	次数	AIC	σ^2
トレンド	1	-21311	0.181×10^{-2}
気圧効果	26	-57836	0.120×10^{-5}



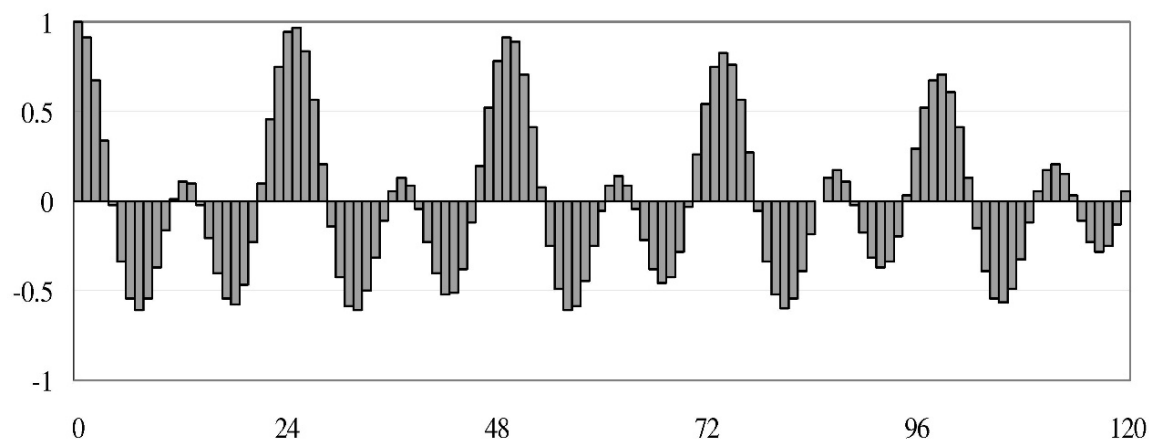
気圧補正後の残差のヒストグラム



気圧補正後の残差の自己相関関数



地球潮汐の自己相関関数



地球潮汐モデル

$$y_n = t_n + P_n + E_n + \varepsilon_n$$

y_n 観測値

t_n トレンド

P_n 気圧効果

E_n 地球潮汐効果

ε_n 観測ノイズ

成分モデル

$$\Delta^k t_n = w_n$$

$$P_n = \sum_{i=0}^m a_i p_{n-i}$$

$$E_n = \sum_{i=0}^l b_i e t_{n-i}$$

状態空間モデル

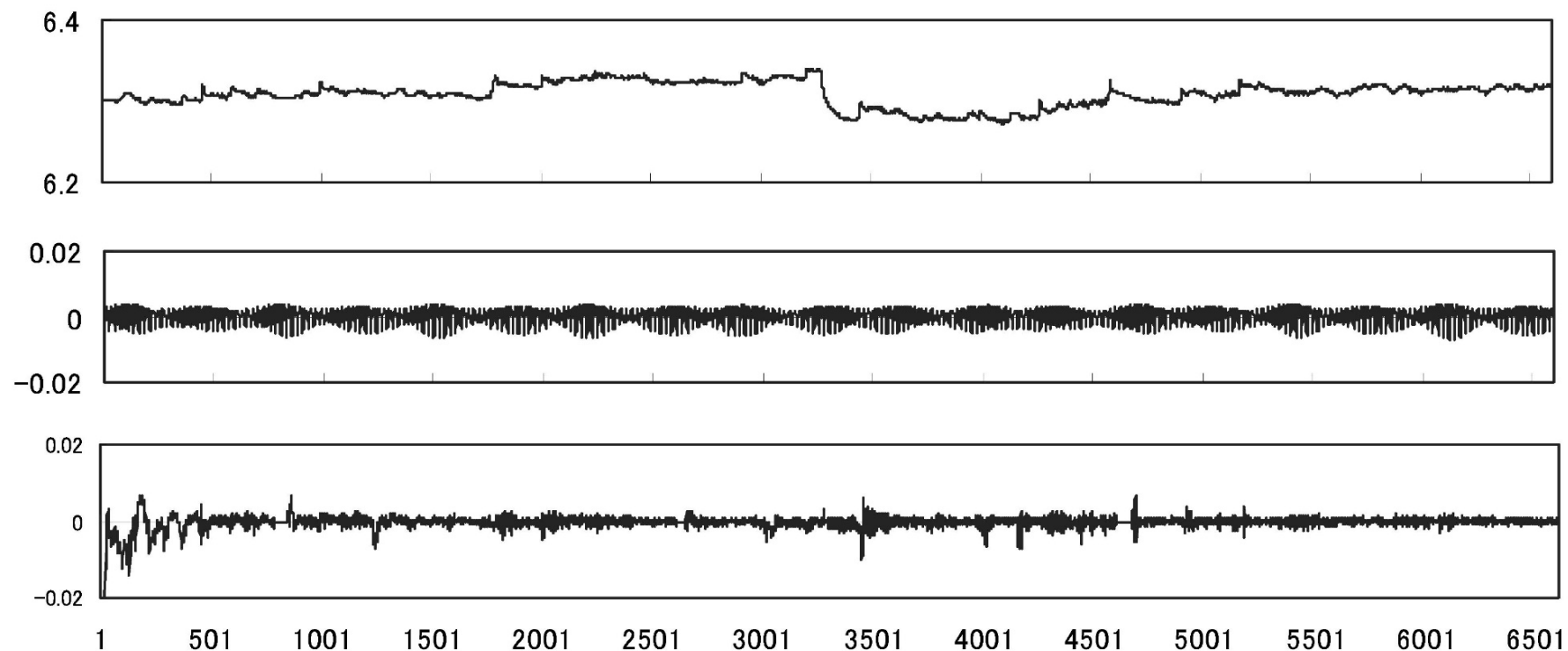
$$x_n = Fx_{n-1} + Gv_n$$

$$y_n = Hx_n + w_n$$

$$x_n = \begin{bmatrix} t_n \\ a_0 \\ \vdots \\ a_m \\ b_0 \\ \vdots \\ b_\ell \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = [1 \quad p_n \quad \cdots \quad p_{n-m} \quad et_n \quad \cdots \quad et_{n-\ell}],$$

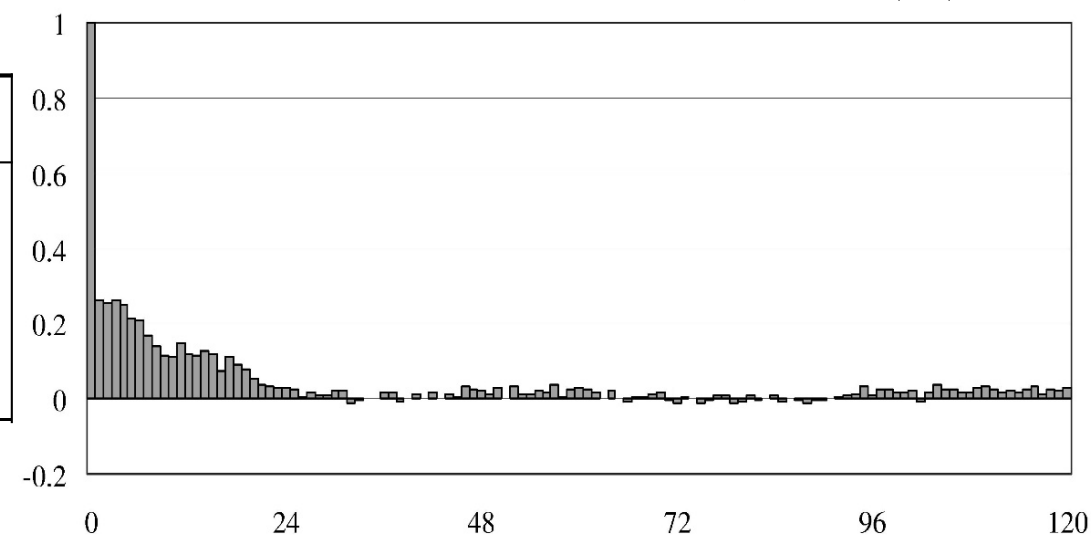
地球潮汐補正後の地下水位，潮汐効果項，残差



推定したモデル

モデル	AIC	σ^2
トレンド	-21311	0.181×10^{-2}
気圧効果	-57836	0.120×10^{-5}
潮汐効果	-59580	0.887×10^{-6}

地球潮汐補正後の残差の自己相関関数



地震の影響の検出 (降雨モデル)

$$y_n = t_n + P_n + E_n + R_n + \varepsilon_n$$

y_n 観測値

E_n 潮汐効果

t_n トレンド

R_n 降雨効果

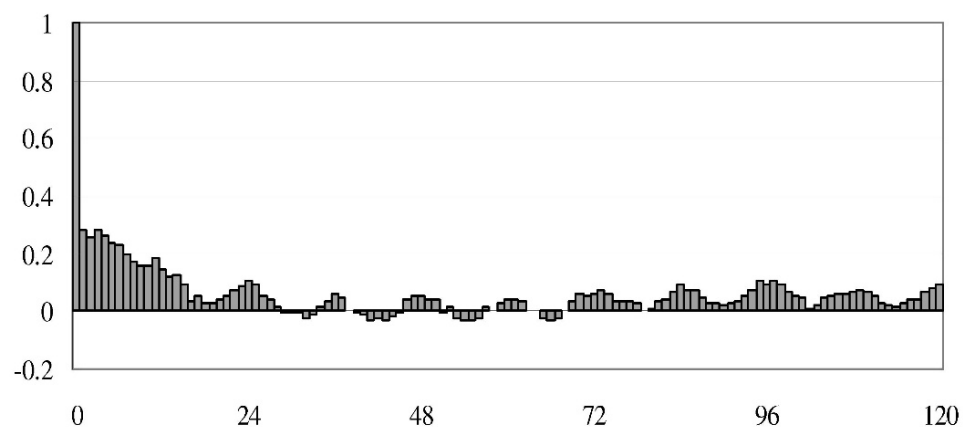
P_n 気圧効果

ε_n 観測ノイズ

成分モデル

$$\begin{aligned}\Delta^k t_n &= w_n, & P_n &= \sum_{i=0}^m a_i p_{n-i} \\ E_n &= \sum_{i=0}^l b_i e t_{n-i}, & R_n &= \sum_{i=1}^k c_i R_{n-i} + \sum_{i=1}^k d_i r_{n-i} + v_n\end{aligned}$$

降雨補正後の残差の自己相関関数



推定したモデルと残差の特徴

モデル	AIC	σ^2	残差分布	自己相関関数
トレンド	-21311	0.181×10^{-2}	負の偏り	3日程度
気圧効果	-57836	0.120×10^{-5}	正の偏り	12.5時間周期
潮汐効果	-59580	0.887×10^{-6}		1日程度まで正
降雨効果	-61810	0.130×10^{-6}	ほぼ対象	2時間周期

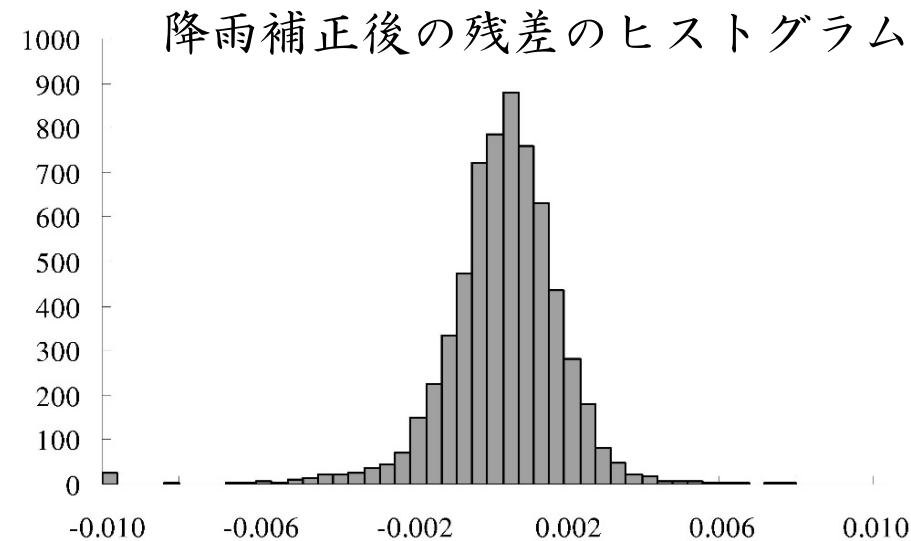
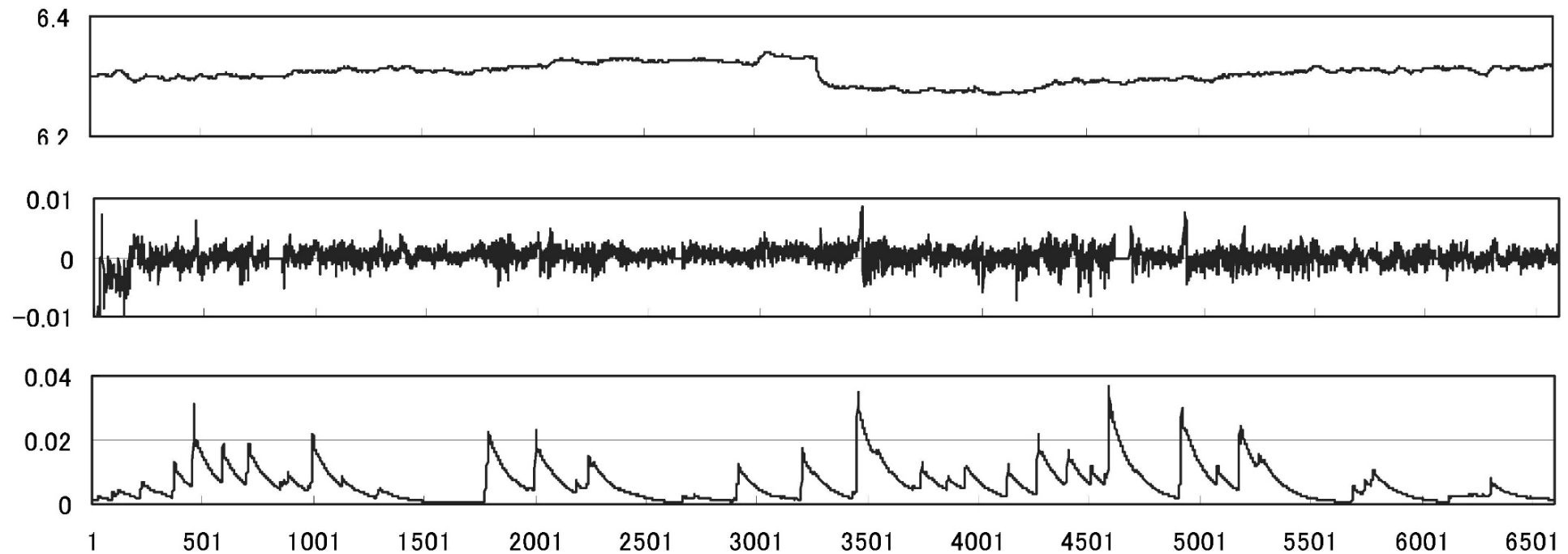
AIC Values

		l			
		0	1	2	3
m	23	...	...	...	...
	24	-57819	-59368	-59498	-59488
	25	-57815	-59374	-59536	-59526
	26	-57830	-59393	-59580	-59569
	27	-57836	-59386	-59575	-59563
	27	-57832	-59379	-59566	-59554

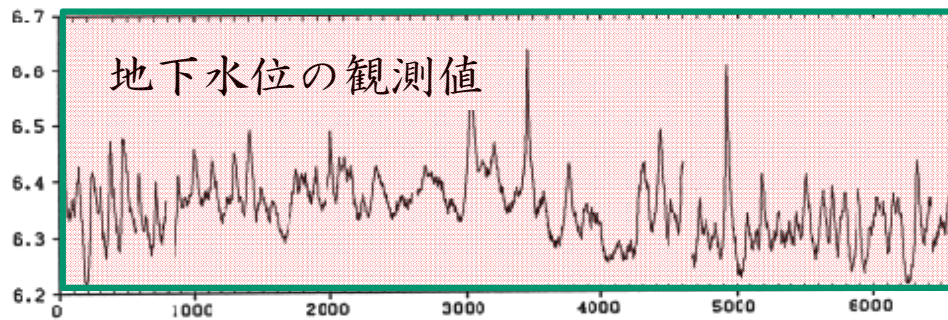
k	AIC
1	-61675
2	-61734
3	-61803
4	-61800
5	-61810
6	-61809

$m = 25, l = 1$

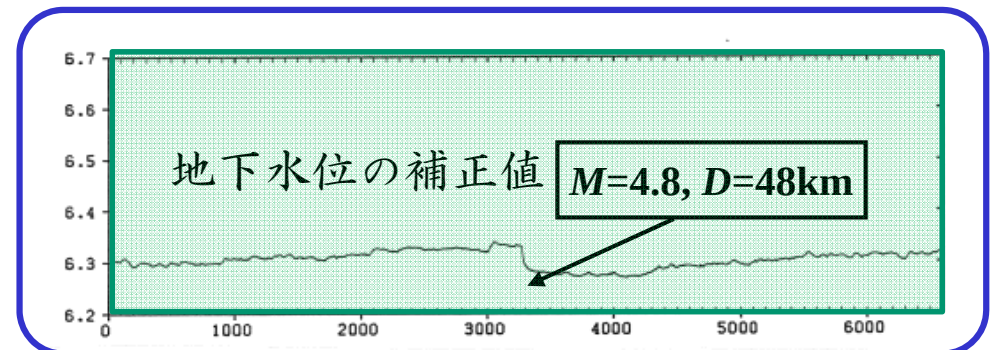
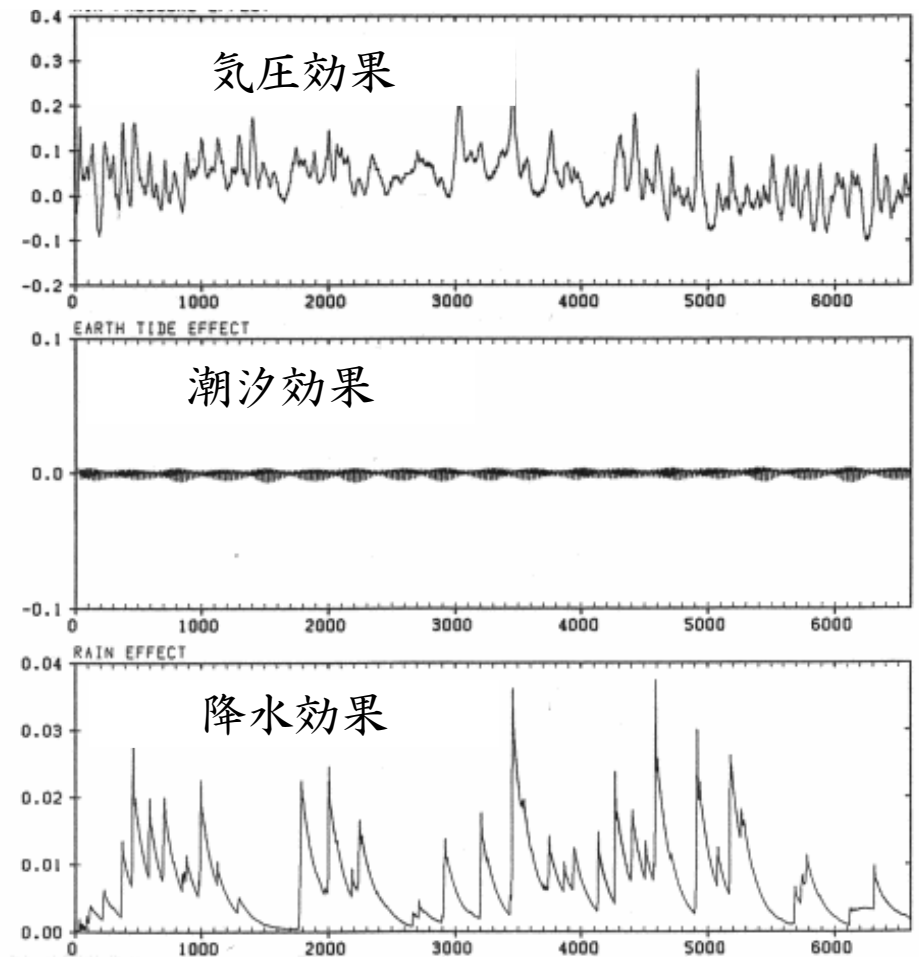
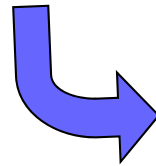
降雨補正後の地下水位，残差，降雨効果項



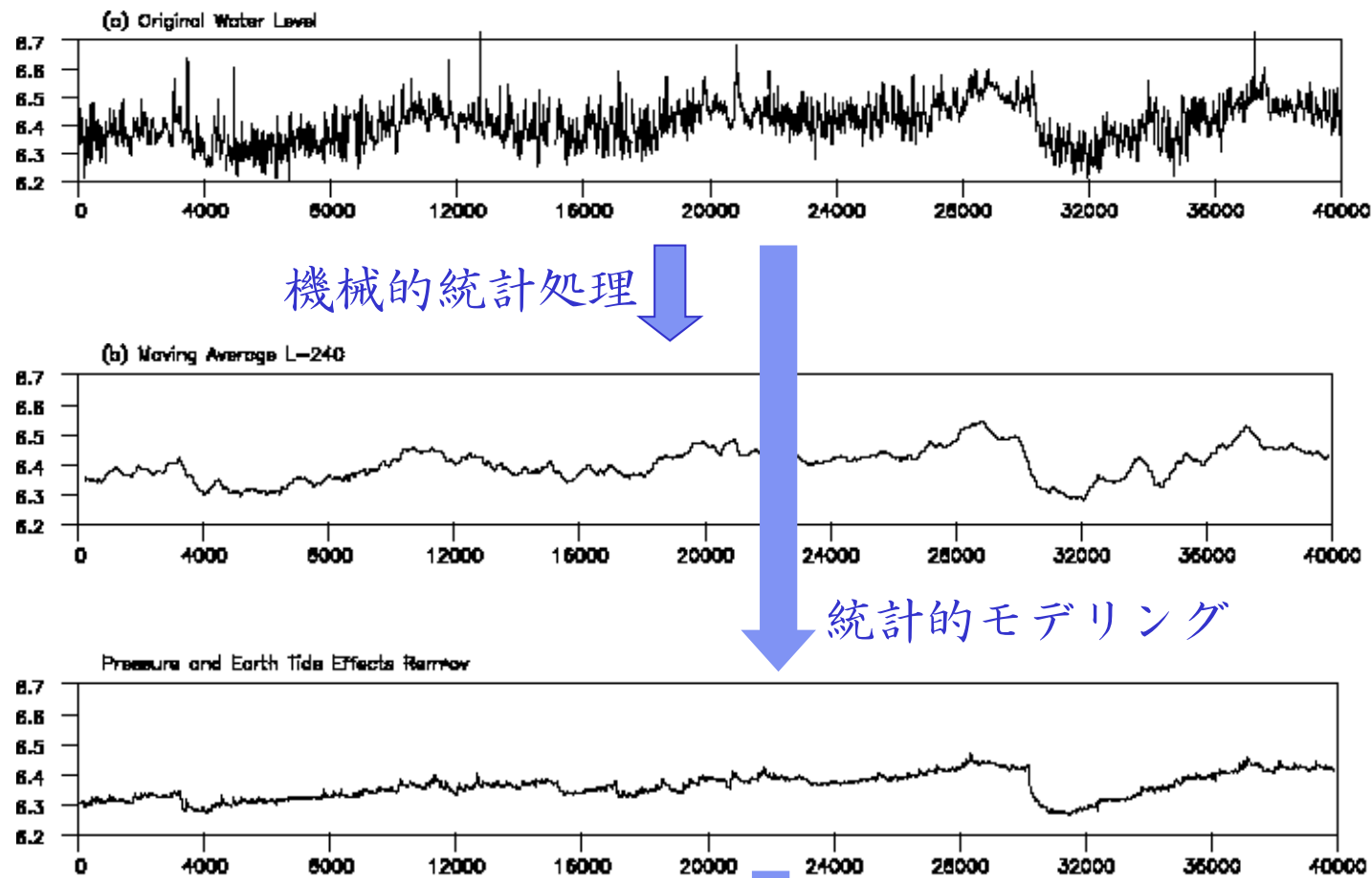
地震の影響の抽出



min AIC model
 $m=25, l=2, k=5$



移動平均 vs. 統計的モデリング



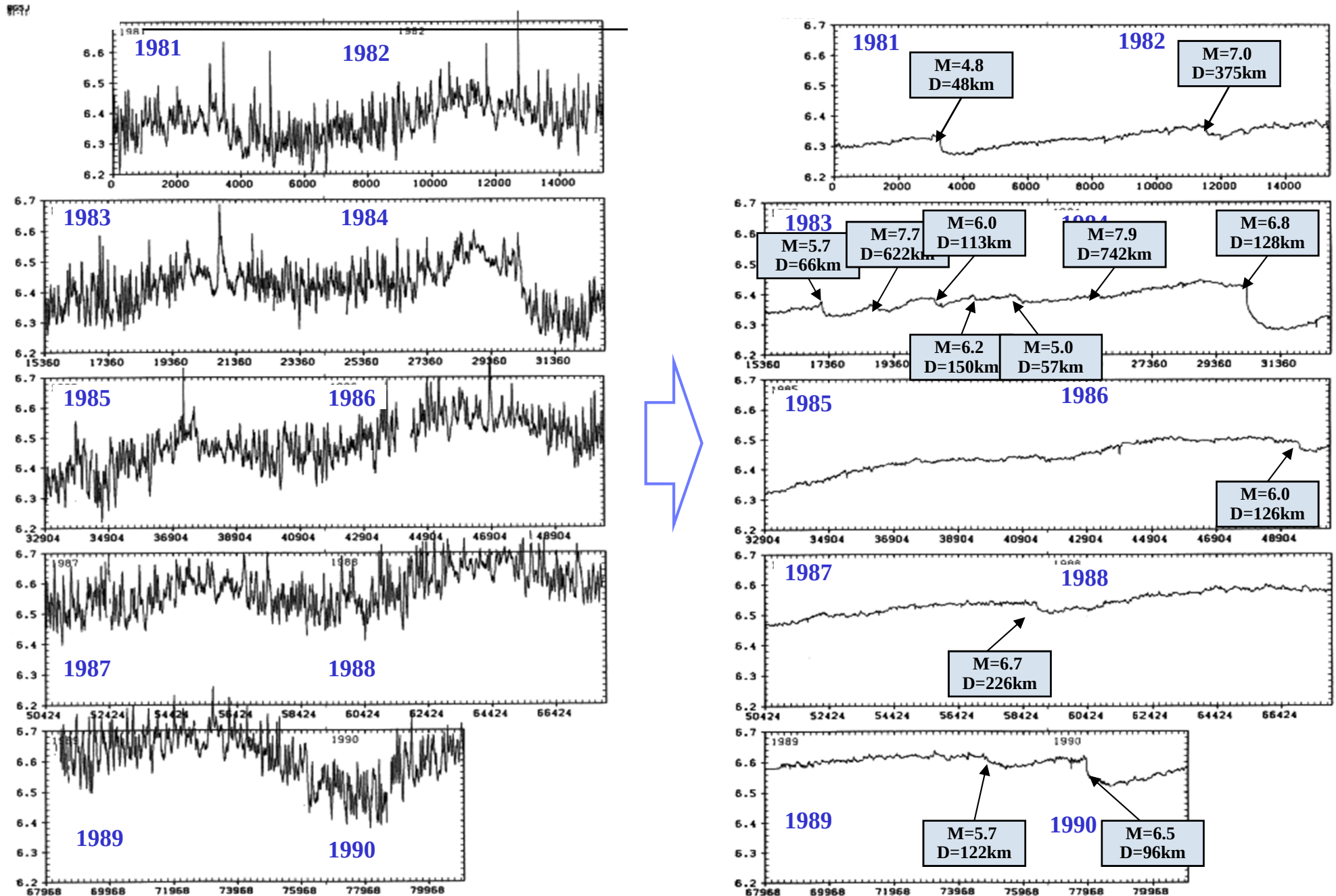
原データ

トレンド
(移動平均)

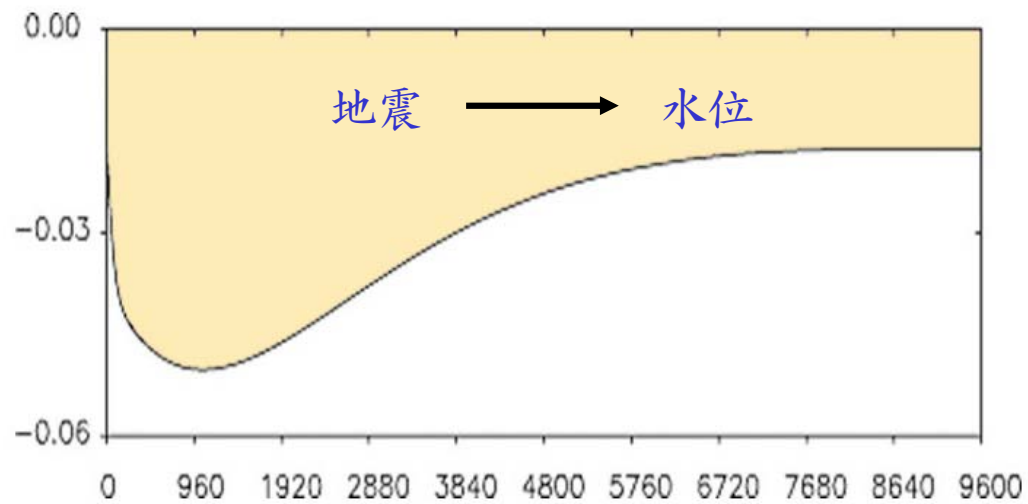
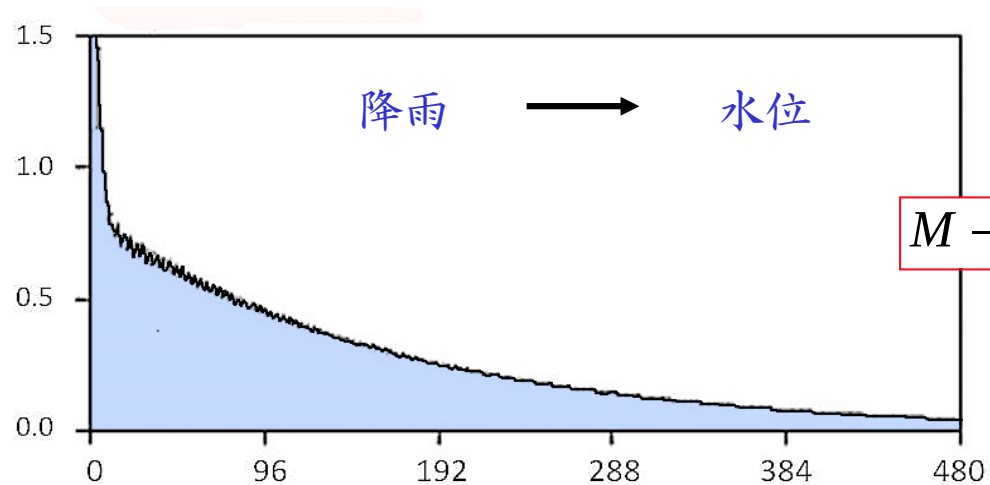
気圧・地球潮汐

求
自

地震の影響の検出

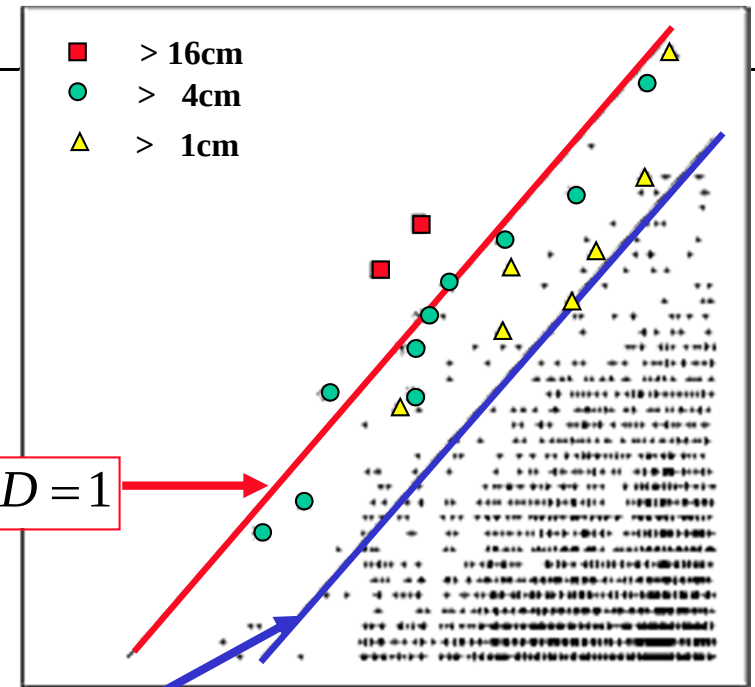


地震の影響



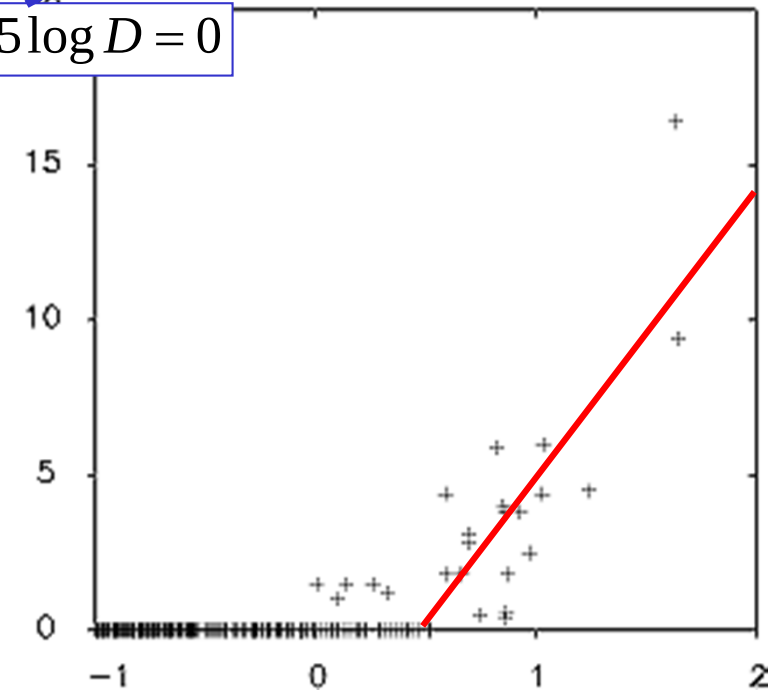
マグニチュード

$$M - 2.45 \log D = 1$$



$$M - 2.45 \log D = 0$$

水位変化

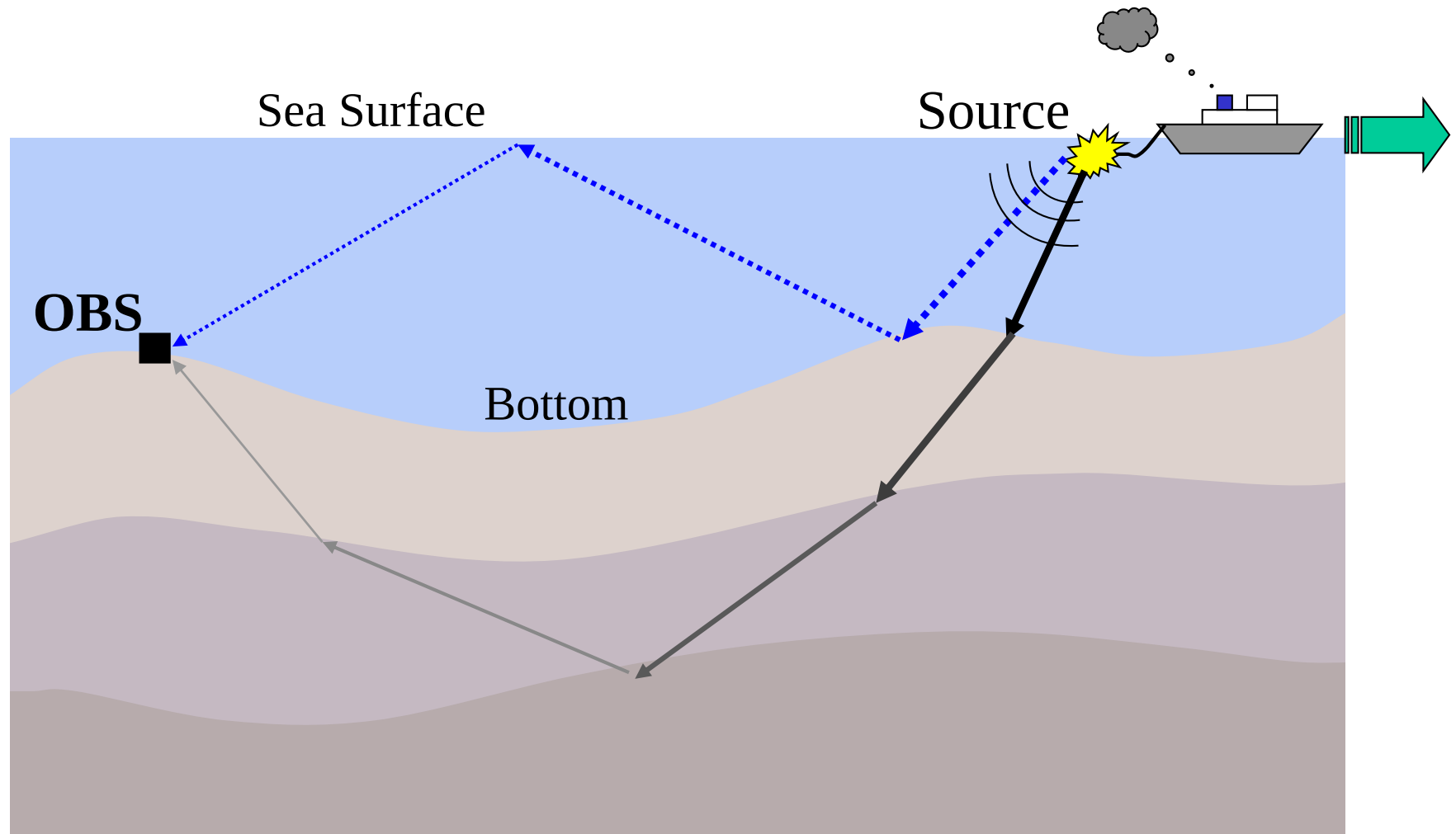


得られた知見

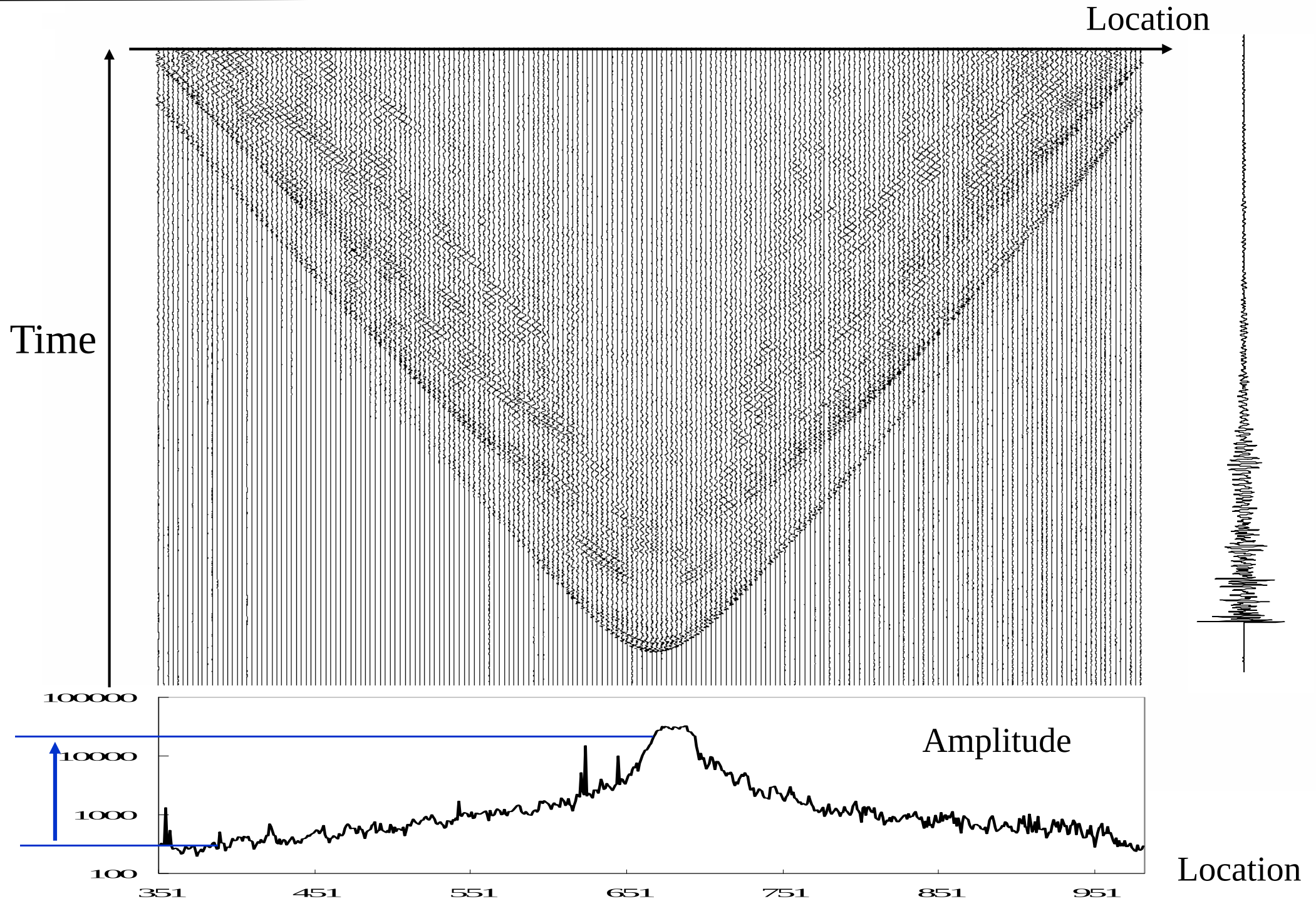
- $M > 2.6 \log D + 0.2$ の場合、影響が検出される
- 変化量は $M - 2.62 \log D$ の関数で決まる
- 地震がない場合およそ6cm/年 の割合で水位が上昇
この地域のひずみの増加に対応か？

OBS (海底地震計) Data

— 地下構造の探索 —



観測時系列 (調整済, 982ch)



時空間モデルによる分解

Basic observation model

$$y_{n,j} = r_{n,j} + s_{n,j} + w_{n,j}$$

$r_{n,j}$ Direct wave

$s_{n,j}$ Reflection wave

Time series model

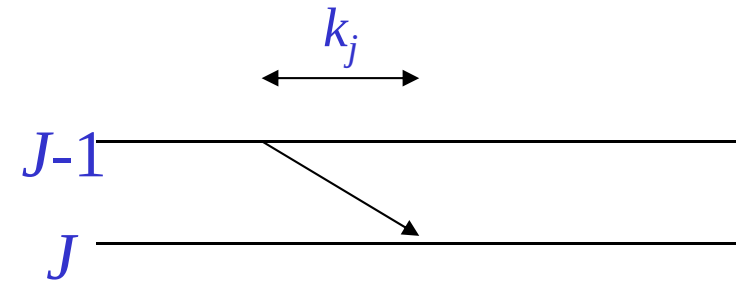
$$r_n = a_1 r_{n-1} + \cdots + a_\ell r_{n-\ell} + v_{n,r}$$

$$s_n = b_1 s_{n-1} + \cdots + b_m s_{n-m} + v_{n,s}$$

Spatial model

$$r_{n,j} = r_{n-k_j,j-1} + u_{n,j}^r$$

$$s_{n,j} = s_{n-h_j,j-1} + u_{n,j}^s$$

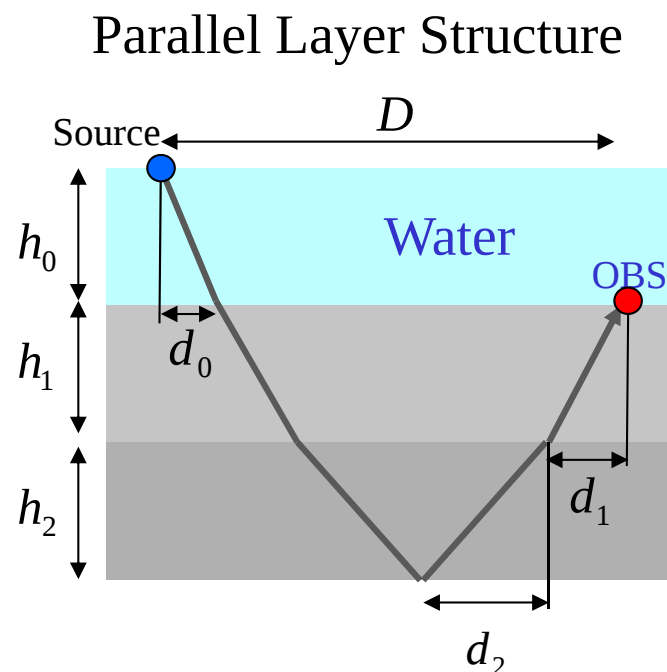


$$k_j = \Delta T_j(W_0), \quad h_j = \Delta T_j(W_X)$$

$T_j(W_0)$: Arrival time of W_0

$T_j(W_X)$: Arrival time of W_X

経路モデルと到着時刻



経路モデル

到着時刻

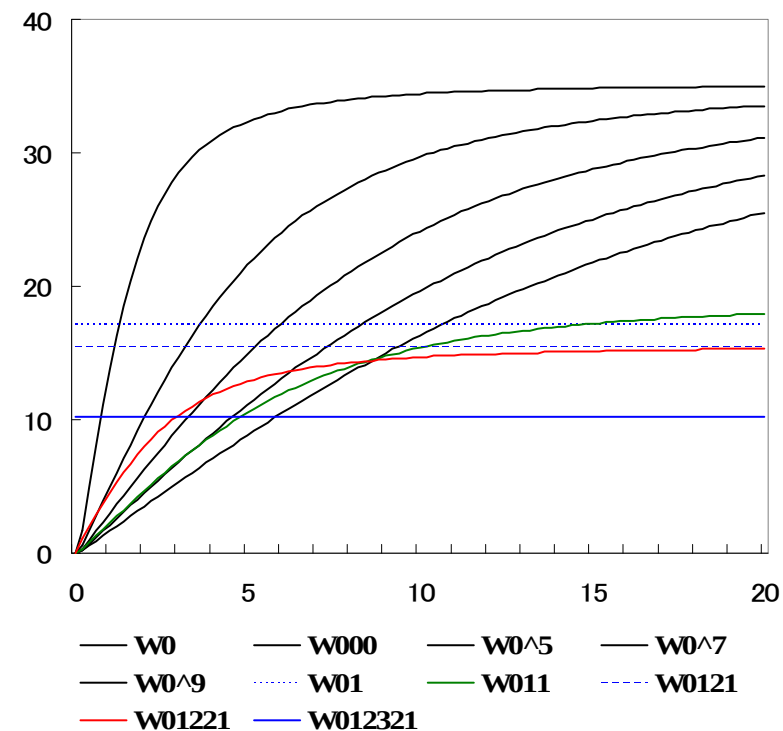
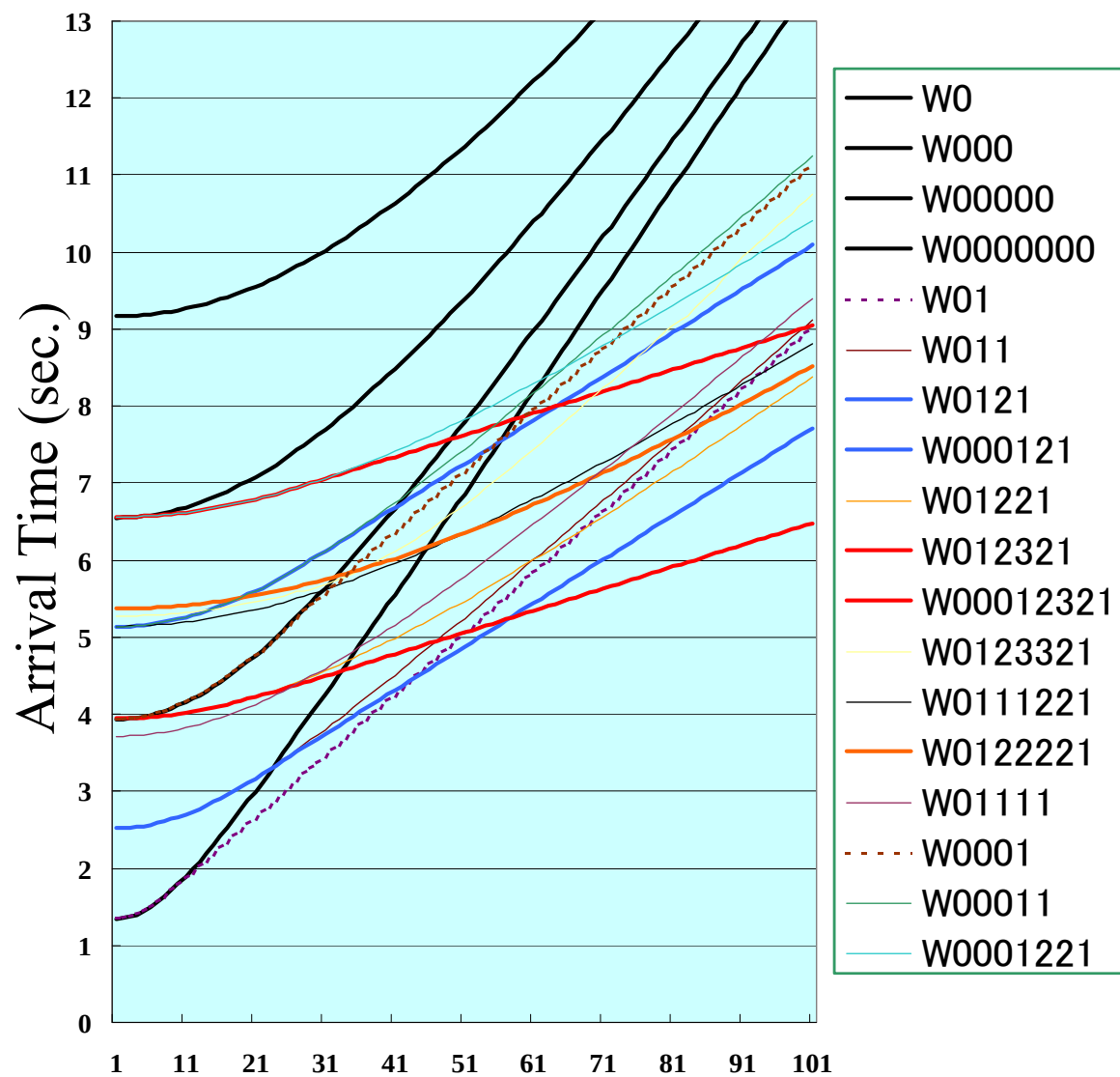
Wave(0)	$v_0^{-1} \sqrt{h_0^2 + D^2}$
Wave(000)	$v_0^{-1} \sqrt{9h_0^2 + D^2}$
Wave(00000)	$v_0^{-1} \sqrt{25h_0^2 + D^2}$
Wave(01)	$v_0^{-1} \sqrt{h_0^2 + d_{01}^2} + v_1^{-1} (D - d_{01})$
Wave(0001)	$3v_0^{-1} \sqrt{h_0^2 + d_{01}^2} + v_1^{-1} (D - 3d_{01})$
Wave(0121)	$v_0^{-1} \sqrt{h_0^2 + d_{02}^2} + 2v_1^{-1} \sqrt{h_1^2 + d_{12}^2} + v_2^{-1} (D - d_{02} - 2d_{12})$
Wave(000121)	$3v_0^{-1} \sqrt{h_0^2 + d_{02}^2} + 2v_1^{-1} \sqrt{h_1^2 + d_{12}^2} + v_2^{-1} (D - 3d_{02} - 2d_{12})$
Wave(012321)	$v_0^{-1} \sqrt{h_0^2 + d_{03}^2} + 2v_1^{-1} \sqrt{h_1^2 + d_{13}^2} + 2v_2^{-1} \sqrt{h_2^2 + d_{23}^2} + v_3^{-1} d_3$

Width $h_0, h_1, h_2, h_3 \dots \text{km}$

Velocity $v_0, v_1, v_2, v_3 \dots \text{km/sec}$

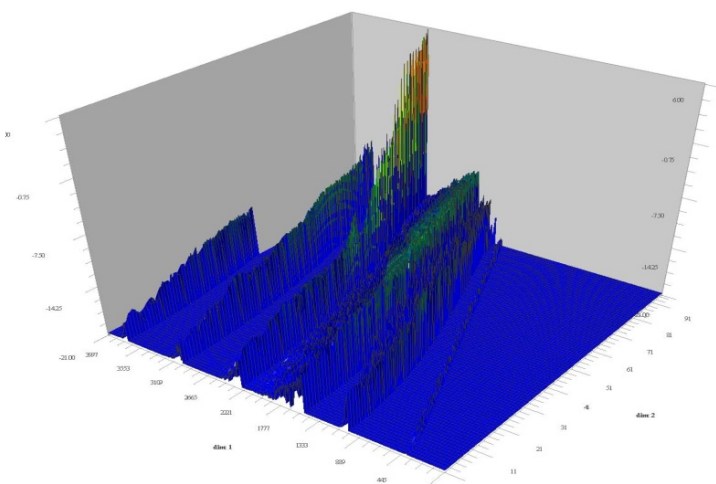
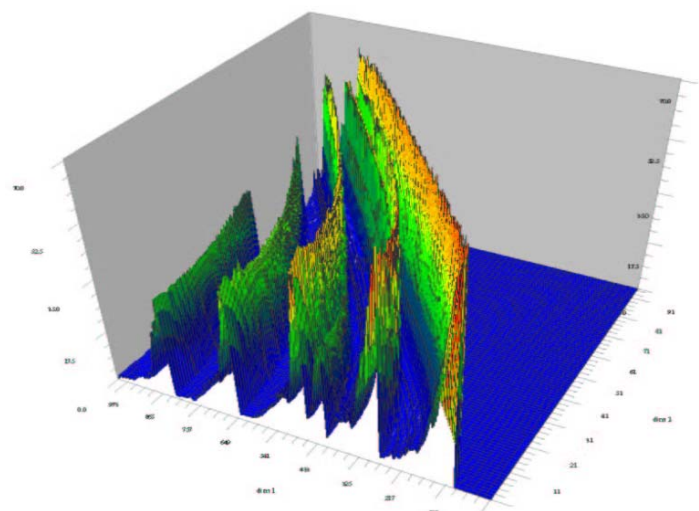
$$d_{ij} = v_i h_i / \sqrt{v_j^2 - v_i^2}, \quad d_3 = D - d_{03} - 2d_{13} - 2d_{23}$$

経路モデルと到着時刻 (OBS4)

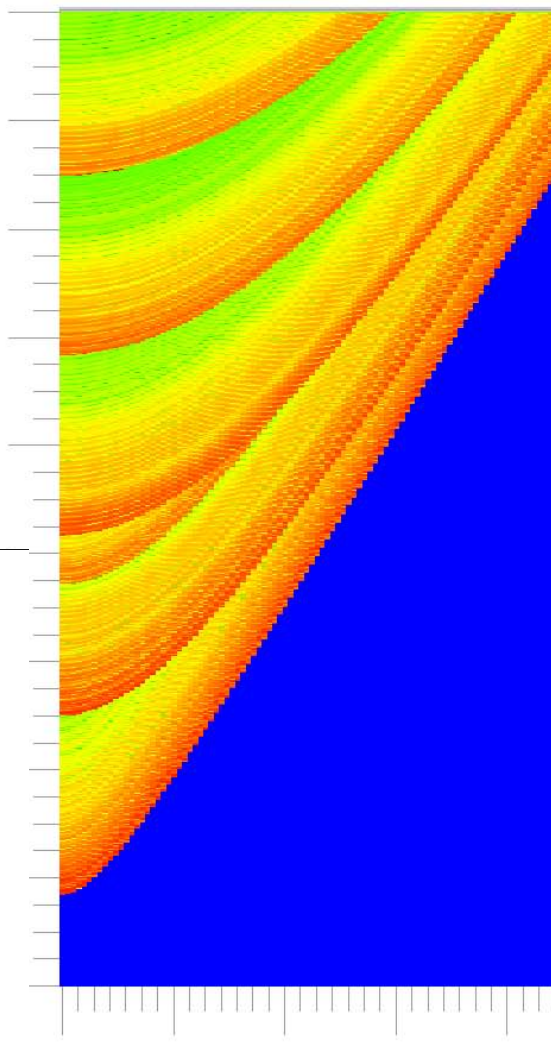


	Epicentral Distance (km)				
Path Model	0	5	10	15	20
Wave0	1.7	32.3	34.4	34.8	35.0
Wave000	0.6	21.6	29.7	32.4	33.5
Wave00000	0.3	14.9	24.1	28.8	31.1
Wave011	—	10.5	15.4	17.2	17.9
Wave01221	—	12.9	14.7	15.1	15.3
Wave012321	—	—	10.2	10.2	10.2

時空間構造モデルによる分解



直接波（海中経由）



反射波・屈折波

