

数理手法 VII（時系列解析）座学コース解答例（修正版）

あくまでも解答例で模範解答というわけではありません。赤字部分を修正。

1. 自己共分散関数関連：

- (a) 自己共分散関数 $C_k > 0, k = 0, 1, \dots, L$ がかなり大きな L について成り立つ場合、何を意味するか。

長期のトレンド成分が支配的であることを示している。

- (b) (AR モデルの推定にも関連) 自己共分散行列が偶関数であることから、1 変量の場合は前向き AR モデルと後ろ向きの AR モデルが同一であることを示せ。

後ろ向きの自己回帰モデル $y_n = \sum_{j=1}^m b_j y_{n+j} + w_n$ について、右側から $y_{n+k}, (k = 1, \dots, m)$ をかけ、期待値を取ると後ろ向きモデルに対する Yule-Walker 方程式 $C_{-k} = \sum_{j=1}^m C_{j-k}, (k = 1, \dots, m)$ が得られるが、1 変量の場合、 $C_{-k} = C_k$ が成り立つので、これは (前向き) AR モデルの Yule-Walker 方程式と同一になる。したがって、二つのモデルの AR 係数は同一となる。分散の推定についても同様。

2. スペクトル関連： 時系列解析では通常一定間隔で観測を行うために、それよりも速い周期の動きを正確に捉えることはできず、単位時間でデータが観測される場合には周波数 $-1/2 \leq f \leq 1/2$ の範囲だけでスペクトルが得られる。その結果、 $1/2$ より早い周期の変動は $1/2$ で折り返した位置の運動として現れる (エリアシングと呼ばれる)。映画やビデオで、高速回転する車輪やプロペラがゆっくり回転したり逆回転して見える現象をエリアシングの観点から説明せよ。図を用いた直感的な説明でよい。

観測間隔を 1 と仮定して、その間に何回転するかを回転数 x と呼ぶことにする。このとき、間隔 1 の観測によっては何回転しているかは認識できないので、見かけ上は小数部分 $x - [x]$ だけが観測される。更に、小数部分が $0.5 < x - [x] < 1$ のときは、 $1 - (x - [x])$ の回転数で逆回転しているように見える。したがって、回転数を増やしていくとき、見かけの回転数は表のようになり、正回転と逆回転を繰り返すことになる。

回転数	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
見かけの回転数	0.2	0.4	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	-0.4	-0.2	0.0	0.2

3. 情報量規準関連： 正規分布モデル $f(y|\mu, \sigma^2) = (\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{1/2} \exp\{-(y - \mu)^2/2\sigma^2\}$, $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$, $\mu_3 = E[(y - \mu)^3]$, $\mu_4 = E[(y - \mu)^4]$ とするとき

- (a) $\frac{\partial}{\partial \mu} \log f(y|\theta)$, $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \log f(y|\theta)$, $\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log f(y|\theta)$, $\frac{\partial}{\partial \mu \partial \sigma^2} \log f(y|\theta)$, $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \log f(y|\theta)$ を求めよ。

$$\log f(y|\mu, \sigma^2) = -\frac{1}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (y - \mu)^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mu} \log f(y|\theta) &= \frac{1}{\sigma^2}(y - \mu) \\
\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \log f(y|\theta) &= -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(y - \mu)^2, \\
\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log f(y|\theta) &= -\frac{1}{\sigma^2} \\
\frac{\partial}{\partial \mu \partial \sigma^2} \log f(y|\theta) &= -\frac{1}{\sigma^4}(y - \mu), \\
\frac{\partial}{(\partial \sigma^2)^2} \log f(y|\theta) &= \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}(y - \mu)^2
\end{aligned}$$

(b) Fisher 情報量 $I(\theta)$ (2×2 行列) を求めよ.

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= E_y \left\{ \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sigma^2}(y - \mu) \\ -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(y - \mu)^2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sigma^2}(y - \mu), & -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(y - \mu)^2 \end{array} \right] \right\} \\
&= E_y \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sigma^4}(y - \mu)^2 & -\frac{y - \mu}{2\sigma^4} + \frac{1}{2\sigma^6}(y - \mu)^3 \\ -\frac{y - \mu}{2\sigma^4} + \frac{1}{2\sigma^6}(y - \mu)^3 & \frac{1}{4\sigma^4} - \frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^6} + \frac{(y - \mu)^4}{4\sigma^8} \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sigma^2} & \frac{\mu_3}{2\sigma^6} \\ \frac{\mu_3}{2\sigma^6} & \frac{\mu_4}{4\sigma^8} - \frac{1}{4\sigma^4} \end{array} \right] \tag{1}
\end{aligned}$$

(c) Expected Hessian $J(\theta)$ (2×2 行列) を求めよ.

$$J(\theta) = E_y \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sigma^2} & \frac{y - \mu}{\sigma^4} \\ \frac{y - \mu}{\sigma^4} & \frac{(y - \mu)^2}{\sigma^6} - \frac{1}{2\sigma^4} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{array} \right] \tag{2}$$

(d) $\text{tr}\{I(\theta)J(\theta)^{-1}\}$ を計算せよ.

$$\begin{aligned}
I(\theta)J(\theta)^{-1} &= \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sigma^2} & \frac{\mu_3}{2\sigma^6} \\ \frac{\mu_3}{2\sigma^6} & \frac{\mu_4}{4\sigma^8} - \frac{1}{4\sigma^4} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{\mu_3}{\sigma^2} \\ \frac{\mu_3}{2\sigma^4} & \frac{\mu_4}{2\sigma^4} - \frac{1}{2} \end{array} \right] \\
\text{tr}\{I(\theta)J(\theta)^{-1}\} &= 1 + \frac{\mu_4}{2\sigma^4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_4}{\sigma^4} \right) \tag{3}
\end{aligned}$$

(e) このモデルに関して AIC と TIC が一致するのはどのような場合か?

$\mu_4 = 3\sigma^4$ (正規分布ではこれが成り立つ) のとき, $\text{tr}\{I(\theta)J(\theta)^{-1}\} = 2$ となって, TIC は AIC と一致する.

4. 定常時系列モデル関連: AR(1) モデル $y_n = ay_{n-1} + v_n$ はマルコフ過程の一種であるが, 一般の AR(m) モデル $y_n = \sum_{j=1}^m a_j y_{n-j} + v_n$ もマルコフ過程として表現できることを示せ.

AR(m) を状態空間モデルで表現すると、 m 次元の状態ベクトルに関しては $x_n = Fx_{n-1} + Gv_n$ となり、マルコフ過程と見做せる。

5. ARMA(2,1) モデル $y_n = a_1y_{n-1} + a_2y_{n-2} + v_n - b_1v_{n-1}, v_n \sim N(0, \sigma^2)$ について

(a) インパルス応答 g_0, g_1, g_2, g_3 を求めよ

$$\begin{aligned} g_0 &= 1 \\ g_1 &= a_1g_0 - b_1 = a_1 - b_1 \\ g_2 &= a_1g_1 + a_2g_0 = a_1(a_1 - b_1) + a_2 \\ g_3 &= a_1g_2 + a_2g_1 = a_1(a_1^2 - a_1b_1 + a_2) + a_2(a_1 - b_1) \end{aligned} \quad (4)$$

(b) ARMA モデルの 1 期先～3 期先予測誤差分散を求めよ

$$\begin{aligned} v_{n+1|n} &= \sigma^2 \\ v_{n+2|n} &= \sigma^2(1 + g_1^2) \\ v_{n+3|n} &= \sigma^2(1 + g_1^2 + g_2^2) \end{aligned} \quad (5)$$

6. AR モデル関連：

(a) AR(2) モデル $y_n = a_1y_{n-1} + a_2y_{n-2} + v_n$ が定常となる領域を図示せよ（横軸： a_1 、縦軸： a_2 とする）

(B の逆数に関する) 特性方程式

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0 \quad (6)$$

の根は

$$\lambda = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} \quad (7)$$

で与えられる。AR モデルが定常であるための条件は、この二つの根がともに単位円内に入ることである。判別式 $a_1^2 + 4a_2 \geq 0$ の時には二つの根は実根となり

$$-2 < a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2} < 2 \quad (8)$$

を満たす必要がある。したがって

$$\begin{aligned} a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2} < 2 &\implies a_2 < 1 - a_1 \\ a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2} > -2 &\implies a_2 < 1 + a_1 \end{aligned} \quad (9)$$

となる。一方、 $a_1^2 + 4a_2 < 0$ の時には二つの根は複素根となり

$$|\lambda| < 1 \implies a_1^2 - (a_1^2 + 4a_2) < 4 \implies a_2 > -1 \quad (10)$$

となる。以上から、AR モデルが定常となる領域は 3 つの直線で定まる三角形となる。

(b) その定常領域を、特性方程式が 2 つの実根を持つ場合と 2 つの複素根を持つ場合に分類せよ。

上記の領域のうち、 $a_2 \geq -\frac{1}{4}a_1^2$ の領域では実根、 $a_2 < -\frac{1}{4}a_1^2$ の領域では複素根となる。

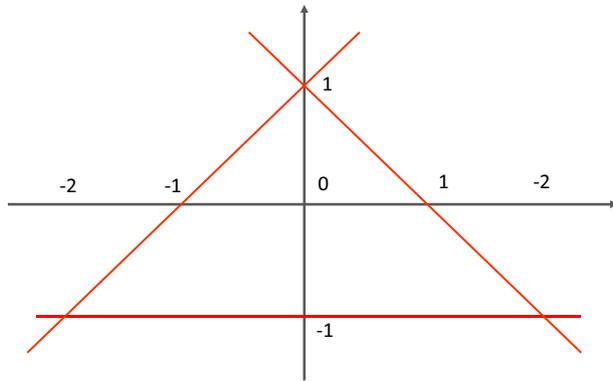


図 1: 定常性の条件

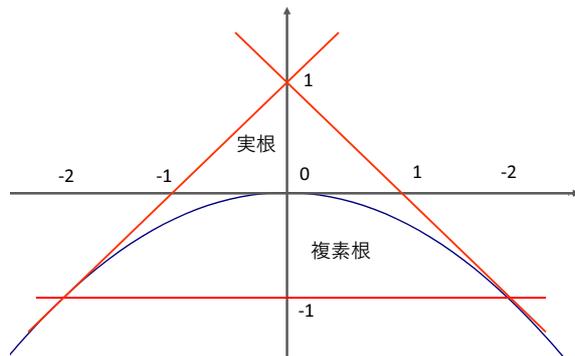


図 2: 定常性の条件