

数理手法 VII（時系列解析）レポート課題

下記実習コース，座学コースの少なくとも一方について提出すること。

提出期限： 6 月 8 日

提出方法： メールによる

宛先 kitagawa@mi.u-tokyo.ac.jp

必ず件名を「時系列解析レポート」とすること。

実習コース

R を利用して計算することを推奨するが，他のソフトや独自の方法で計算しても良い。また，下記の Web Decomп を用いると，ソフトのインストール等を行わずに Web サイト上で自分のデータの解析結果を得ることができる。

1. 自分が興味がある事象に関して，分析の目的に適した時系列データを取得せよ。
 - (a) どのような事象に興味をもったか
 - (b) データ取得にあたって，その事象についてどういう観点で分析するとよさそうと考えるか

注：現時点で適当なデータが見つからない場合は，とりあえず講義で用いているデータあるいは Web-Decomp(下記) の sample data を用いても良い。
2. 取得したデータを図示し，その特徴や前処理が必要かどうか検討せよ
 - (a) 取得したデータの特徴を挙げること
 - (b) 定常といえるかどうか検討せよ
 - (c) 定常とは考えにくい場合は（近似的な）定常化のための前処理を考え適用せよ
3. （必要があれば定常化した）データについて
 - (a) 共分散関数を計算し図示すること
 - (b) スペクトル（ピリオドグラム）を計算し図示すること
 - (c) AIC ベストな AR モデルを推定すること
 - (d) (a)-(c) から分かったことは何か
4. 当該のデータから有益な情報を取得するためには，今後どのようなモデル分析をするとよいか検討せよ。（これまでの講義内容ではできないことでよい）
5. その他，自主的に分析を行ったことがあれば記載しても良い

● R の利用法

- R のインストールサイト等については，第 1 回の講義資料（「時系列解析講義資料」で検索）の 11 ページに記載。（より詳しいインストール法の解説は，例えば「統計フリーソフト「R」」で検索）
- 講義で説明した解析方法やモデルに関する計算は殆ど TSSS パッケージで実行できる。ただし，TSSS パッケージを一度インストールしておく必要がある。<http://jasp.ism.ac.jp/ism/TSSS/>

● Web Decomп による計算

もっと手っ取り早く簡単に計算結果を得たい場合は，下記の Web Decomп のサイトにアクセスすること。Web 上でデータを貼り付ければ，サーバで計算し数値結果や，グラフを返してくれる。

<http://ssnt.ism.ac.jp/inets/inets.html>

座学コース (Quiz)

1. 自己共分散関数関連 :

- (a) 自己共分散関数 $C_k > 0, k = 0, 1, \dots, L$ がかなり大きな L について成り立つ場合, 何を意味するか。
- (b) (AR モデルの推定にも関連) 自己共分散行列が偶関数であることから, 1 変量の場合は前向きの AR モデルと後ろ向きの AR モデルが同一であることを示せ。

2. スペクトル関連 :

時系列解析では通常一定間隔で観測を行うために, それよりも速い周期の動きを正確に捉えることはできず, 単位時間でデータが観測される場合には周波数 $-1/2 \leq f \leq 1/2$ の範囲だけでスペクトルが得られる。その結果, $1/2$ より早い周期の変動は $1/2$ で折り返した位置の運動として現れる (エリアシングと呼ばれる)。映画やビデオで, 高速回転する車輪やプロペラがゆっくり回転したり逆回転して見える現象をエリアシングの観点から説明せよ。図を用いた直感的な説明でよい。

3. 情報量規準関連 :

正規分布モデル $f(y|\mu, \sigma^2) = (\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{1/2} \exp\{-(y-\mu)^2/2\sigma^2\}$, $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$, $\mu_3 = E[(y-\mu)^3]$, $\mu_4 = E[(y-\mu)^4]$ とするとき

- (a) $\frac{\partial}{\partial \mu} \log f(t|\theta)$, $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \log f(t|\theta)$, $\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log f(t|\theta)$, $\frac{\partial}{\partial \mu \partial \sigma^2} \log f(t|\theta)$, $\frac{\partial}{(\partial \sigma^2)^2} \log f(t|\theta)$ を求めよ。
- (b) Fisher 情報量 $I(\theta)$ (2×2 行列) を求めよ。
- (c) Expected Hessian $J(\theta)$ (2×2 行列) を求めよ。
- (d) $\text{tr}\{I(\theta)J(\theta)^{-1}\}$ を計算せよ。
- (e) このモデルに関して AIC と TIC が一致するのはどのような場合か?

4. 定常時系列モデル関連 :

AR(1) モデル $y_n = ay_{n-1} + v_n$ はマルコフ過程の一種であるが, 一般の AR(m) モデル $y_n = \sum_{j=1}^m a_j y_{n-j} + v_n$ もマルコフ過程として表現できることを示せ。

5. ARMA(2,1) モデル $y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + v_n - b_1 v_{n-1}, v_n \sim N(0, \sigma^2)$ について

- (a) インパルス応答 g_0, g_1, g_2, g_3 を求めよ
- (b) ARMA モデルの 1 期先~3 期先予測誤差分散を求めよ

6. AR モデル関連 :

- (a) AR(2) モデル $y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + v_n$ が定常となる領域を図示せよ (横軸: a_1 , 縦軸: a_2 とする)
- (b) その定常領域を, 特性方程式が 2 つの実根を持つ場合と 2 つの複素根を持つ場合に分類せよ。

Time Series Analysis: Report saassignment

Submit at least one of the following practice course and the quiz course assignments.

Submission deadline: June 8

Submission method: by e-mail

Send e-mail to kitagawa@mi.u-tokyo.ac.jp

Make the subject "time series analysis report".

Practice course

Although it is recommended to analyze data using R, it may be analysed by other software or by your own methods. In addition, using the following Web Decom web-cite, you can obtain the analysis results of your data on the Web site without installing software etc.

1. Acquire time series data suitable for the purpose of analysis concerning the events of which you are interested.

- (a) What kind of events were you interested in?
- (b) When acquiring data, what perspective do you think about analyzing the event

Note: If appropriate data can not be found at the present time, data used in the lecture tentatively or sample data of Web-Decomp (below) may be used.

2. Make the graph the acquired data and consider its characteristics and whether the preprocessing is necessary.

- (a) To raise the characteristics of acquired data.
- (b) Consider whether the data can be said to be steady
- (c) When it is difficult to think that it is stationary, apply preprocessing for (nearly) stationarization

3. About the stationarize data

- (a) Compute and plot the graph of autocorrelation function
- (b) Compute and plot the power spectrum (or periodogram) of the series
- (c) Obtain AIC best ATR model.
- (d) What was found from (a) - (c)?

4. In order to acquire useful information from the time series, consider what kind of model analysis should be done in the future.

5. In addition, if you have voluntarily conducted analysis, you may write it.

● How to use R

- Regarding the installation site etc. of R, it is described on page 11 of the 1st lecture material (search by "time series analysis lecture material"). (For a more detailed explanation of the installation method, search with the key phrase such as "Statistical free software" R "for example)
- Almost all calculations related to the analysis methods and models explained in the lecture can be executed by the TSSS package. Of course, it is necessary to install the TSSS package beforehand.
<http://jasp.ism.ac.jp/ism/TSSS/>

● Computation by Web Decom

If you would like to get results more quickly and easily without installing a software, please visit the Web Decom site below. If you paste the data on the Web cite, it calculates on the server and returns the numerical result and the graphs.

<http://ssnt.ism.ac.jp/inets/inets.html>

Quiz course

1. Autocovariance function :

- (a) If autocovariance function $C_k > 0, k = 0, 1, \dots, L$ holds for fairly large L , what does it mean?
- (b) (Also related to the estimation of the AR model). Since the autocovariance matrix is an even function, in the case of univariate, show that the forward AR model and the backward AR model are identical.

2. Power spectrum :

In time series analysis, observation is usually performed at regular intervals, so it is impossible to accurately grasp movement with a period faster than that period, and if data is observed in unit time, the frequency $-1/2 \leq f \leq 1/2$ is obtained only in the range of $-1/2 \leq f \leq 1/2$. As a result, fluctuations of the period quicker than $f = 1/2$ appear as motion of the position folded back at $1/2$ (called aliasing).

Explain the phenomenon that the wheel or propeller rotating at high speed in a movie or video looks slowly rotating or rotating in reverse, from the viewpoint of aliasing. It may be an intuitive explanation using the figure.

3. Information criteria:

Consider a normal distribution model with $f(y|\mu, \sigma^2) = (\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{1/2} \exp\{-(y - \mu)^2/2\sigma^2\}$, $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$, $\mu_3 = E[(y - \mu)^3]$, $\mu_4 = E[(y - \mu)^4]$,

- (a) Obtain $\frac{\partial}{\partial \mu} \log f(t|\theta)$, $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \log f(t|\theta)$, $\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log f(t|\theta)$, $\frac{\partial}{\partial \mu \partial \sigma^2} \log f(t|\theta)$, $\frac{\partial^2}{(\partial \sigma^2)^2} \log f(t|\theta)$.
- (b) Obtain the (2×2) Fisher information matrix $I(\theta)$.
- (c) Obtain the (2×2) expected Hessian $J(\theta)$.
- (d) Calculate $\text{tr}\{I(\theta)J(\theta)^{-1}\}$.
- (e) When does AIC and TIC agree on this model?

4. Stationary time series model:

AR (1) model $y_n = ay_{n-1} + v_n$ is a kind of Markov process. For general AR (m) model: $y_n = \sum_{j=1}^m a_j y_{n-j} + v_n$, show that it can also be expressed as a Markov process.

5. For ARMA(2,1) model $y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + v_n - b_1 v_{n-1}, v_n \sim N(0, \sigma^2)$,

- (a) Compute the impulse responses g_0, g_1, g_2, g_3 .
- (b) Obtain the 1-step, 2-step and 3-step ahead prediction error variances of the ARMA model.

6. Stationarity of AR model :

- (a) Plot the stationary region of the AR(2) model $y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + v_n$ using a_1 as horizontal axis and a_2 as Vertical axis.
- (b) Classify the stationary region into two sub-regions on which the characteristic equation has two real roots and two complex roots, respectively,