

4-1 統計および数理基礎

東京大学 数理・情報教育研究センター

2020 年 5 月 11 日

(最終更新) 2021 年 5 月 8 日

概要

- 数学や統計学は、データおよび AI の利活用のために必須の道具でもあります。この節では、その数学および統計学の基礎を学びます。
- 「ものの集まり」を表す集合の概念を学んだあと、自然界や経済学の法則などによく現れる指数関数と対数関数について学びます。次に、関数の増え方や減り方を調べる微分と、関数の値を積み重ねる計算である積分とを学びます。
- 統計学の基礎としても重要な役割を果たす、確率を学びます。また、高次元のデータを扱う道具として重要な、線形代数を学びます。

本教材の目次 (1/2)

1.	集合		5
1.1.	集合とは	(基礎)	6
1.2.	集合の基本法則	(発展)	15
2.	指数関数と対数関数		18
2.1.	指数関数とは	(基礎)	19
2.2.	ネイピア数と指数関数	(発展)	28
2.3.	指数関数の応用	(参考)	30
2.4.	対数関数とは	(基礎)	33
2.5.	対数関数に関する発展的な話題	(発展)	42
2.6.	指数関数と対数関数の応用	(参考)	46
3.	1 変数関数の微分と積分		54
3.1	微分とは	(基礎)	55
3.2	微分に関する発展的な話題	(発展)	66
3.3	微分の応用	(参考)	75
3.4	積分とは	(基礎)	77
3.5	積分の応用	(参考)	84

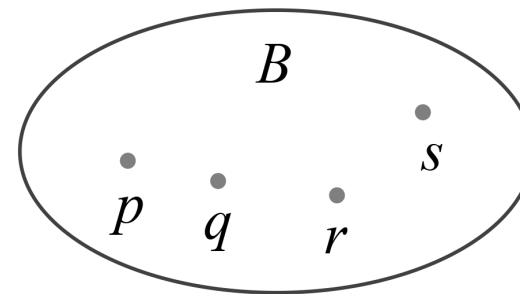
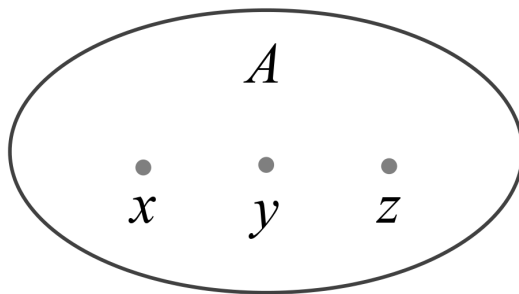
本教材の目次 (2/2)

4.	確率, 順列, 組み合わせ		91
4.1	順列とは	(基礎)	92
4.2	組合せ	(基礎)	94
4.3	順列と組合せに関する発展的な話題	(発展)	97
4.4	確率とは	(基礎)	101
4.4	確率の諸性質	(発展)	107
4.4	確率分布	(発展)	117
5.	線形代数		141
5.1	ベクトルと行列	(基礎)	142
5.2	行列とベクトルの演算	(発展)	154
5.3	ベクトルのノルム	(発展)	165
5.4	線形代数の応用	(参考)	167
6.	索引		181

4-1-1 集合

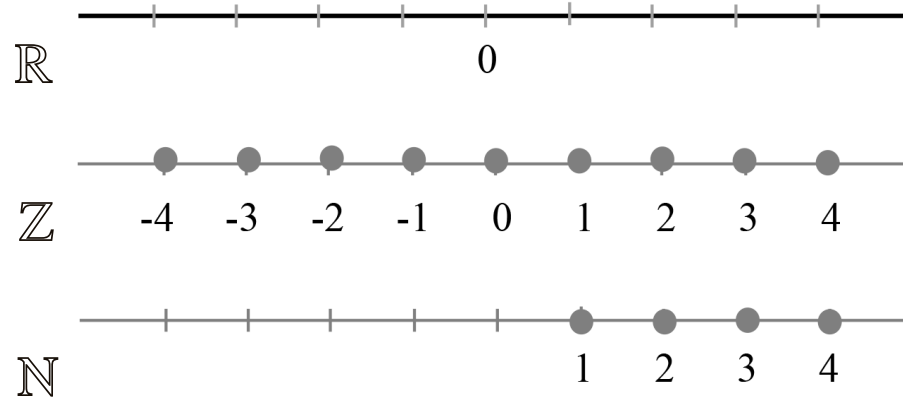
集合の概念

- 集合とは, ある特定の「もの」の集まり のことです.
- 集合 A を構成する「もの」のことを 要素または元^{げん}とよびます.
 - x が A の要素であるとき, $x \in A$ または $A \ni x$ と書きます.
 - p が A の要素でないとき, $p \notin A$ または $A \not\ni p$ と書きます.
- 有限個の要素からなる集合を有限集合とよび,
無限個の要素からなる集合を無限集合とよびます.



基本的な数の集合

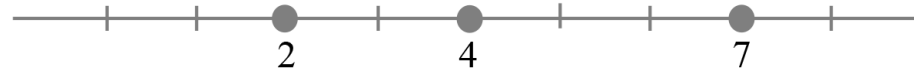
- 実数の集合 $\mathbb{R}$.
- 整数の集合 $\mathbb{Z}$.
- 自然数の集合 $\mathbb{N}$.
- 有理数の集合 $\mathbb{Q}$.



- これらは, すべて 無限集合です.
- 例 : $16 \in \mathbb{N}$, $24.2 \notin \mathbb{N}$, $24.2 \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$.

集合の表し方 (1/2)

- 例として, $\{2, 4, 7\}$ は, 「3 つの実数 2, 4, 7 からなる集合」 のことです.
 - 要素を書き並べる順番を変えても, 集合としては同じものです.
 - つまり, $\{2, 4, 7\} = \{2, 7, 4\} = \{7, 4, 2\} = \{4, 7, 2\} = \dots$.



- $\{5, 6, 7, \dots, 30\}$ は, 「5 以上 30 以下の自然数からなる集合」 のことです.
- $\{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$.
- $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} = \mathbb{Z}$.

集合の表し方 (2/2)

- 「5 以上 30 以下の自然数からなる集合」は, $\{5, 6, 7, \dots, 30\}$ と表しました.
- これとは別の表し方として,

$\{x \mid x \text{ は } 5 \text{ 以上 } 30 \text{ 以下の自然数} \},$
または, $\{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x \leq 30\}$ もあります.

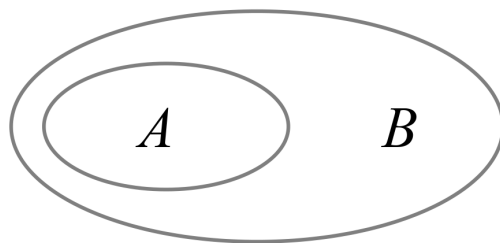
- $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 30\}$ は, 「5 以上 30 以下の実数からなる集合」です.
- $\{2i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ は, 偶数の集合です.
- $\{2i - 1 \mid i \in \mathbb{Z}\}$ は, 奇数の集合です.

空集合

- 要素を1つももたない集合を, 空集合とよびます.
 - 空集合は, $\emptyset$ や $\{\}$ など表します.
- 例 : $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\} = \emptyset$.
- 例 : $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq -5\} = \emptyset$.

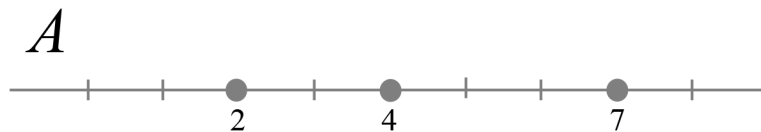
部分集合

- 集合 A の要素がすべて集合 B の要素でもあるとき, A を B の部分集合とよびます.
- このとき, $A \subset B$ または $B \supset A$ と書きます.



- $A \subset B$ かつ $A \supset B$ のとき, $A = B$ と書きます.

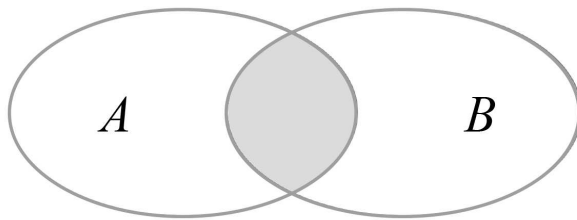
- 例 : $A = \{2, 4, 7\}$ のとき,



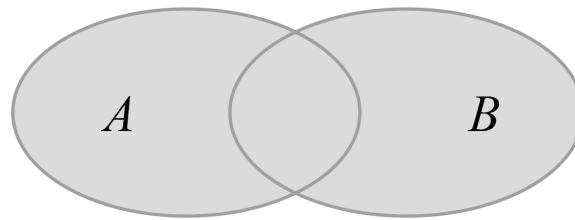
- $A \subset \{2, 4, 6, 7\}$, $A \subset \mathbb{N}$, $\{2, 4\} \subset A$.
- $\{2, 5\}$ は, A の部分集合ではありません.
- A の部分集合は, 全部で 8 個あります :
 $\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2, 4\}, \{4, 7\}, \{2, 7\}, \{2, 4, 7\}$.

共通部分, 和集合, 差集合 (1/2)

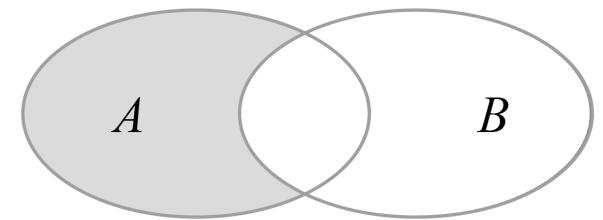
- 2つの集合 A と B に対して, 次の集合が定義できます.
- A と B の共通部分 (または, 交わり) $A \cap B$ とは,
 A と B の両方に含まれる要素をすべて集めた集合のことです.
- A と B の和集合 $A \cup B$ とは,
 A の要素と B の要素をすべて集めた集合のことです.
- A と B の差集合 $A - B$ とは,
 A に含まれるが B に含まれない要素をすべて集めた集合のことです.



$A \cap B$



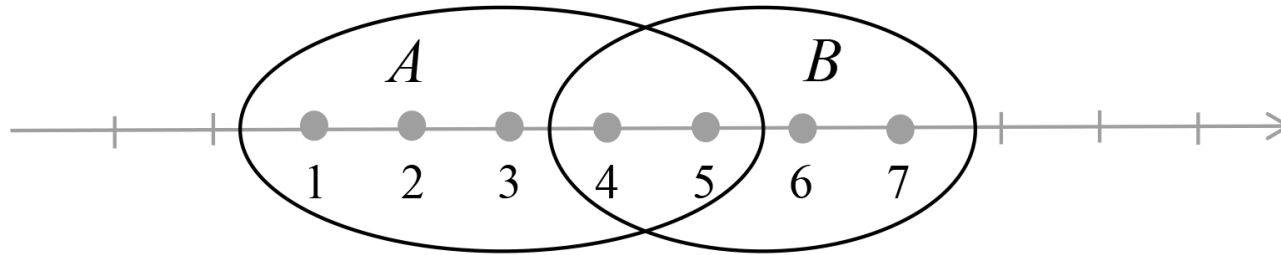
$A \cup B$



$A - B$

共通部分, 和集合, 差集合 (2/2)

- 例 : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ に対して,
 - $A \cap B = \{4, 5\}$.
 - $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
 - $A - B = \{1, 2, 3\}$.
 - $B - A = \{6, 7\}$.

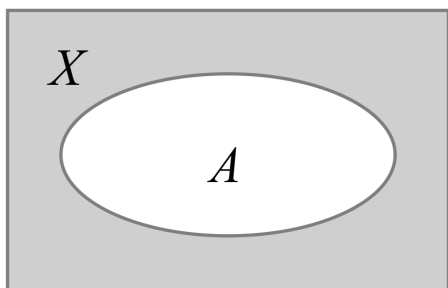


補集合

- 補集合

- 集合 X と、その部分集合 A に対して、
 $X - A$ を A の (X における) 補集合とよび、
 A^c や $X \setminus A$ など表します。

- このとき、 X を全体集合とよびます。



(なお、このような図は、ベン図とよばれます。)

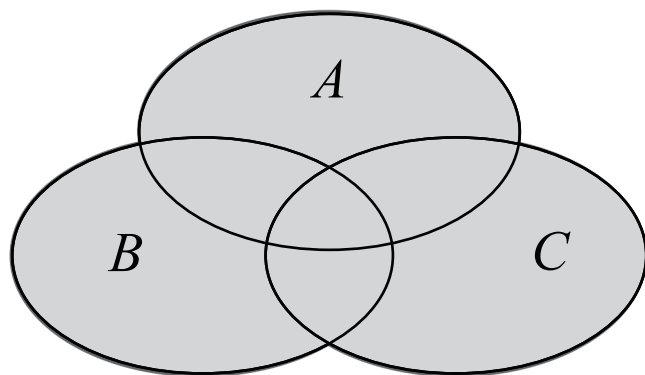
- 例 : $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3, 4\}$ とすると, $A^c = \{1, 5, 6\}$ です。
- 例 : $X = \mathbb{Z}$, $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ は } 3 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る}\}$ とすると,
 A^c は「3 の倍数と、3 で割ると 2 余る整数とを、すべて集めた集合」です。

結合法則と分配法則 (1/2)

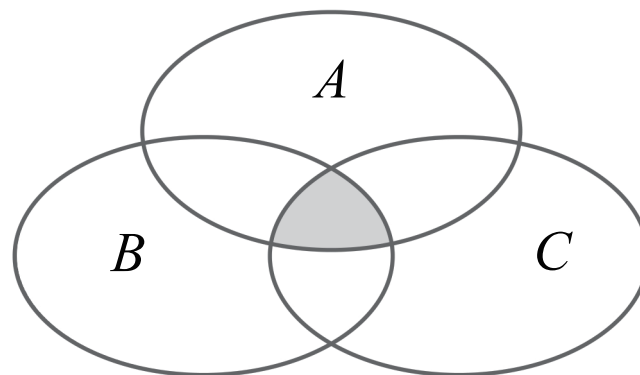
- 結合法則

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.



(i)



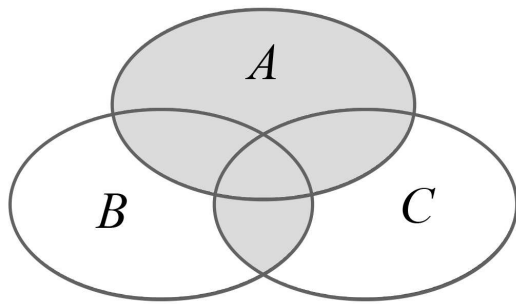
(ii)

結合法則と分配法則 (2/2)

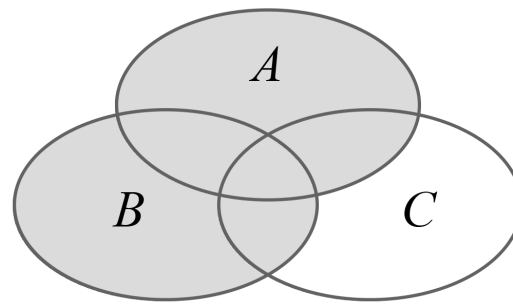
- 分配法則

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

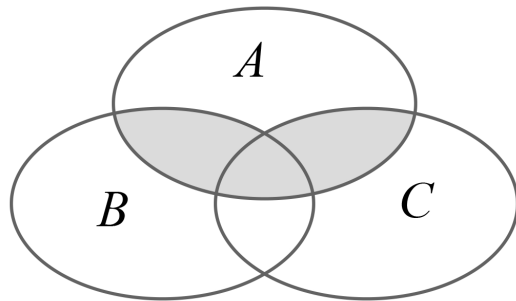
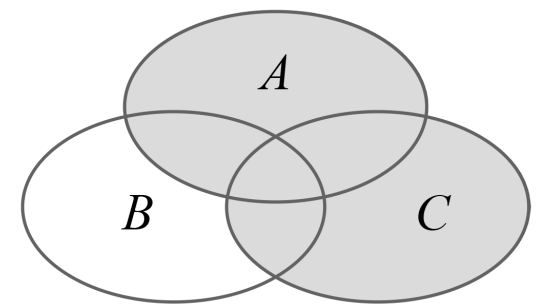


(i) の左辺

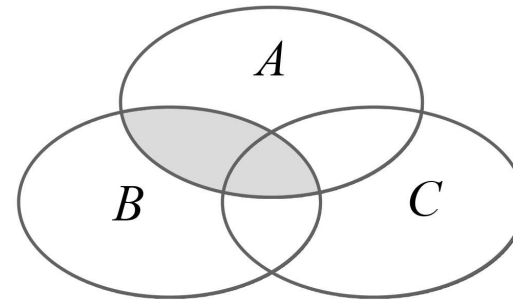


$\cap$

(i) の右辺

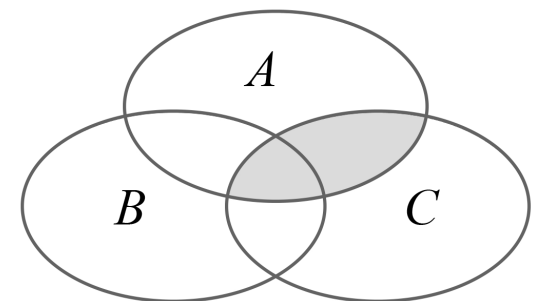


(ii) の左辺



$\cup$

(ii) の右辺

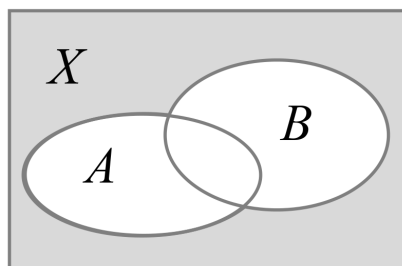


ド・モルガンの法則

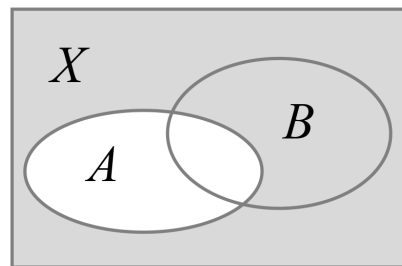
- 集合 X, A, B に対して,

(i) $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$.

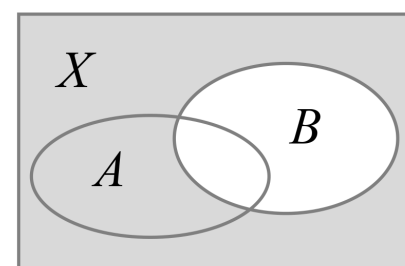
(ii) $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$.



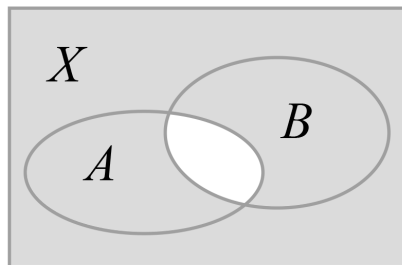
(i) の左辺



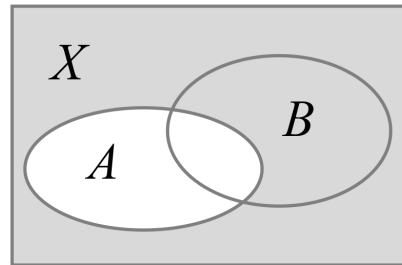
$\cap$



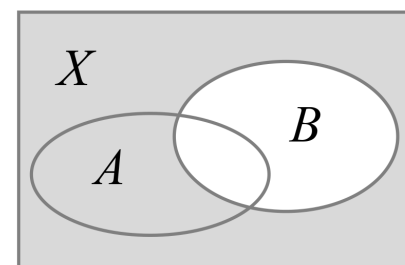
(i) の右辺



(ii) の左辺



$\cup$



(ii) の右辺

4-1-2 指数関数と対数関数

指数とは

- 累乗（べき）とは，同じ数や文字を，何回か掛け合わせたものです.
 - 2^3 は，2 を 3 回かけたもの： $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.
 - 2^4 は，2 を 4 回かけたもの： $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.
 - y^3 は， y を 3 回かけたもの： $y^3 = y \times y \times y$.
- 右肩にのっている 3 や 4 を，（累乗の）指数とよびます.

指数は どんなときに使われるでしょうか

- 大きな数を表すとき

- 例： 地球から太陽までの距離は，およそ

$$149600000000 \text{ m} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m} .$$

- 小さな数を表すとき

- 例： 水素の原子核の直径は，およそ

$$0.000000000000000175 \text{ m} = 1.75 \times 10^{-15} \text{ m} .$$

- 位取り (n 進法)

- 例： 2 進法での $(110.01)_2$ は，10 進法の $2^2 + 2^1 + 2^{-2} = 6.25$.

- 有効数字

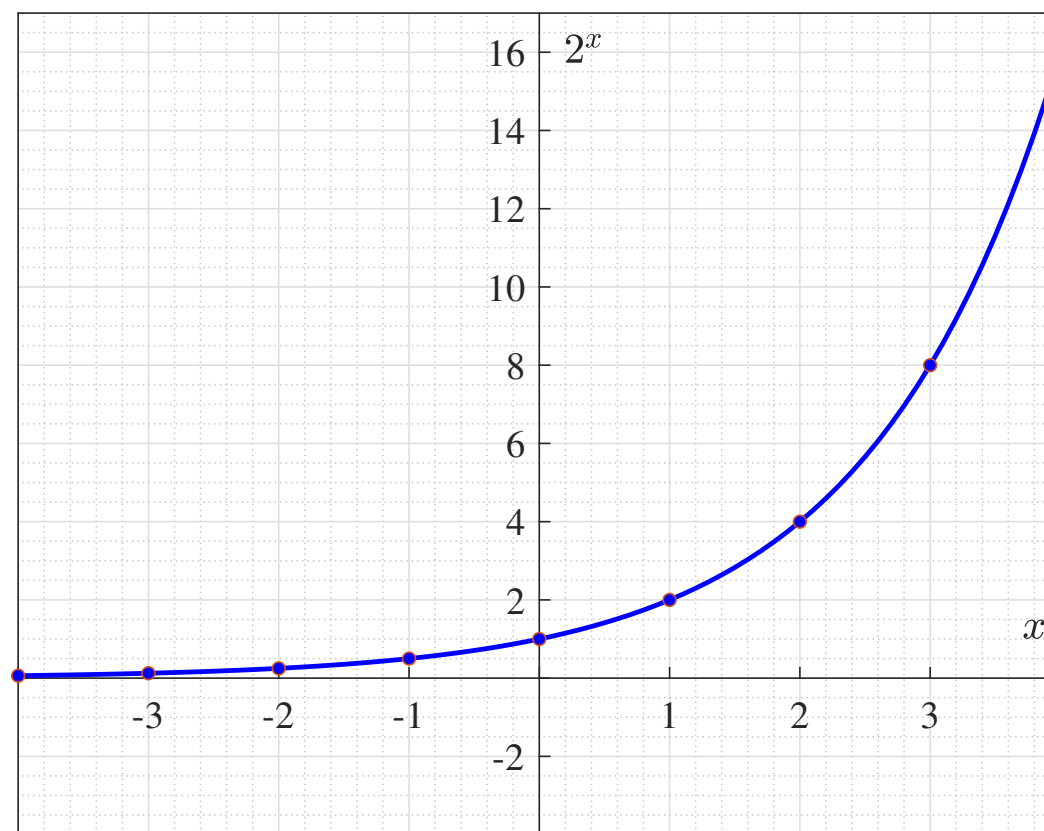
- 例： 1.00×10^4 は有効数字 3 桁， 1.0000×10^4 は有効数字 5 桁.

指数に関する諸公式

- 正の数 a, b と, 実数 p, q に対して,
 - $a^{p+q} = a^p a^q$.
 - $a^{pq} = (a^p)^q$. 例 : $a^{2p} = a^{p+p} = a^p a^p = (a^p)^2$.
 - $(ab)^p = a^p b^p$.
- したがって,
 - $a^p = a^{p+0} = a^p a^0$ より, $a^0 = 1$.
 - $1 = a^{p-p} = a^p a^{-p}$ より, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.
 - $a = (a^{\frac{1}{p}})^p$ より, $a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$.
 - 同様に, $a^q = (a^{\frac{q}{p}})^p$ より, $a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$.
- 無理数 p に対する a^p の定義は, あまり容易ではありません (高校数学では, 有理数乗の極限として理解します) .

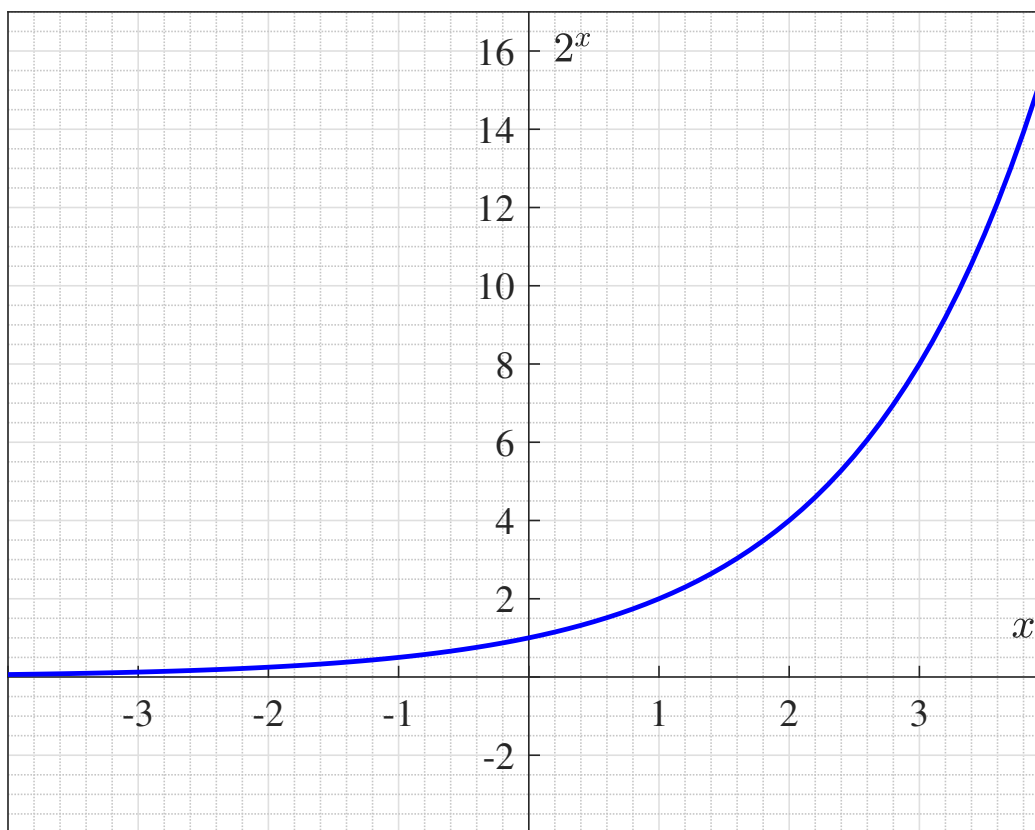
指数関数とそのグラフ (1/6)

- 2^x (x は実数) というように, 2 を何回かけるかという回数 (指数) を連続的に変化させます.
- この $f(x) = 2^x$ のことを, 2 を^{てい}底とする指数関数とよびます.



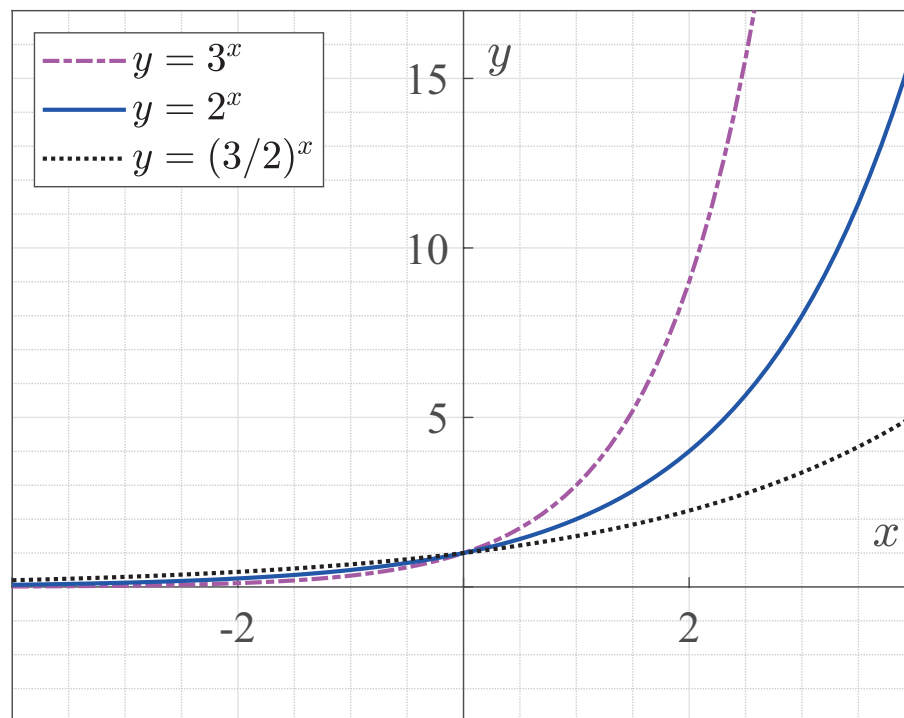
指数関数とそのグラフ (2/6)

- 一般に, 正の数 a が与えられたとき,
 a^x のことを「 a を底とする指数関数」とよびます.
- $a > 1$ なら, a^x は単調増加です.



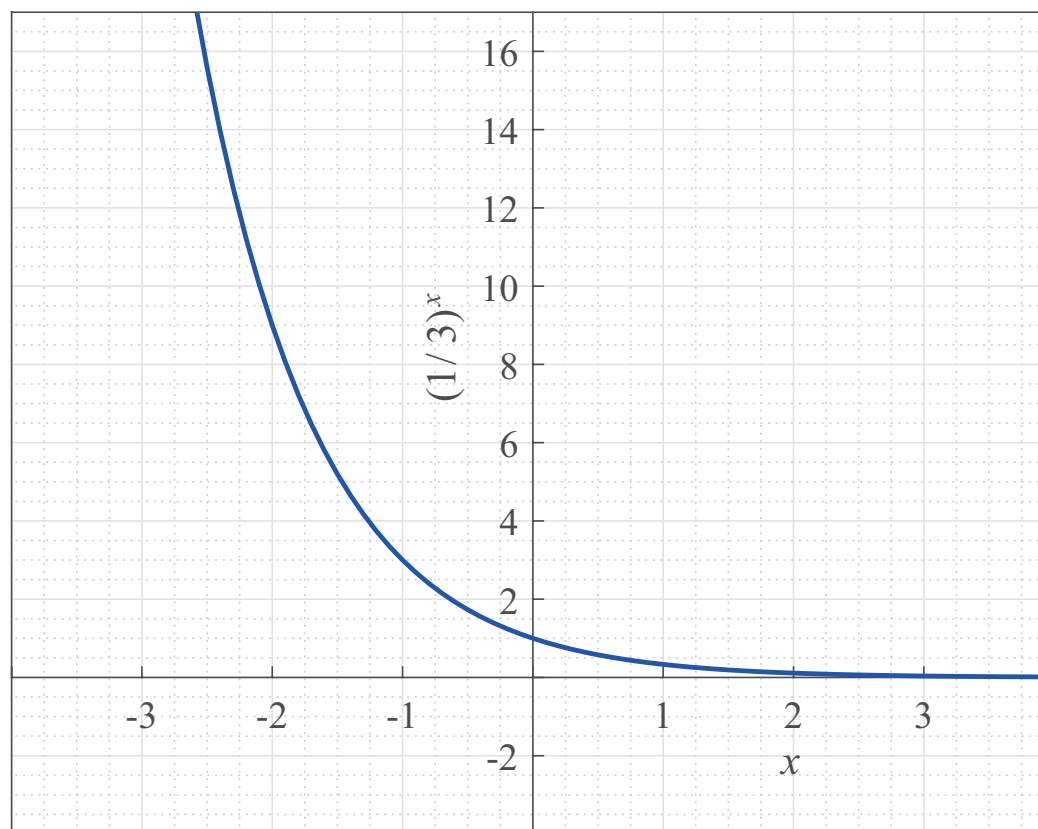
指数関数とそのグラフ (3/6)

- 底が $a > 1$ なら, a^x は単調増加で, x が大きくなるにつれて急激に増加します.
- x が小さくなるにつれて 0 に近づきます (常に正).
 - x が正のとき, $a > b$ なら $a^x > b^x$.
 - x が負のとき, $a > b$ なら $a^x < b^x$.



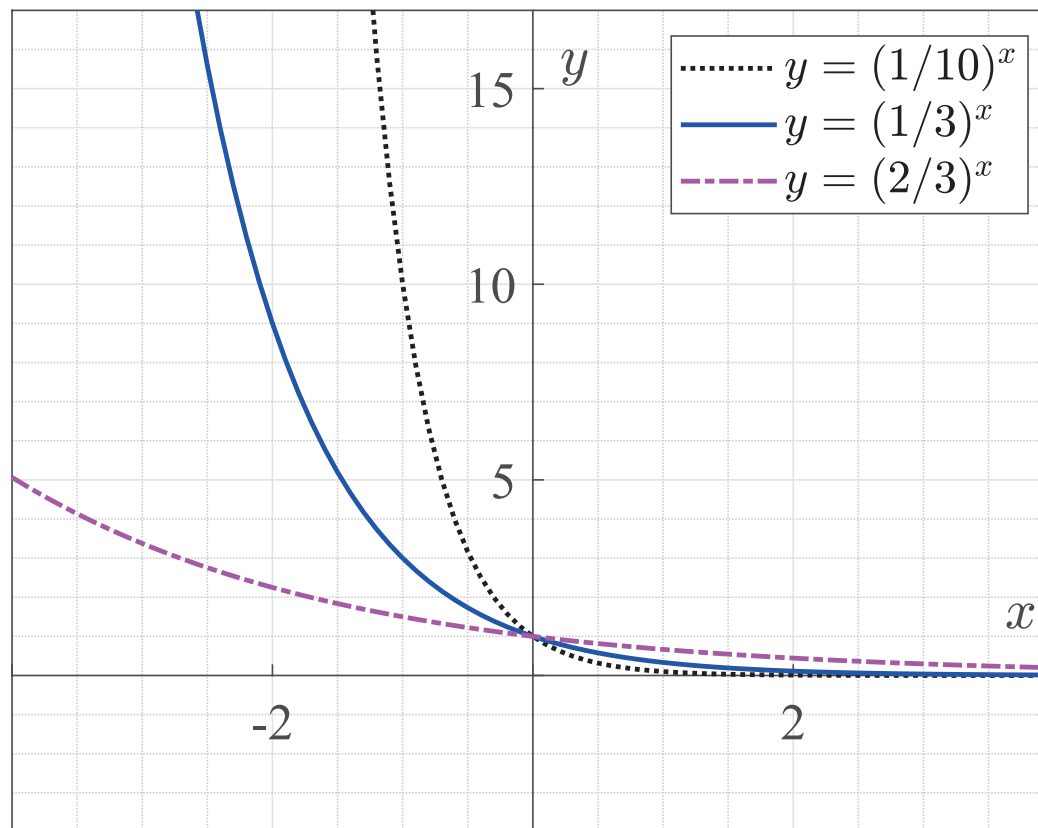
指数関数とそのグラフ (4/6)

- 底が $0 < a < 1$ なら, a^x は単調減少で, x が大きくなると 0 に近づきます.
- 常に正の値をとります.
- x が小さくなるにつれて急激に増加.



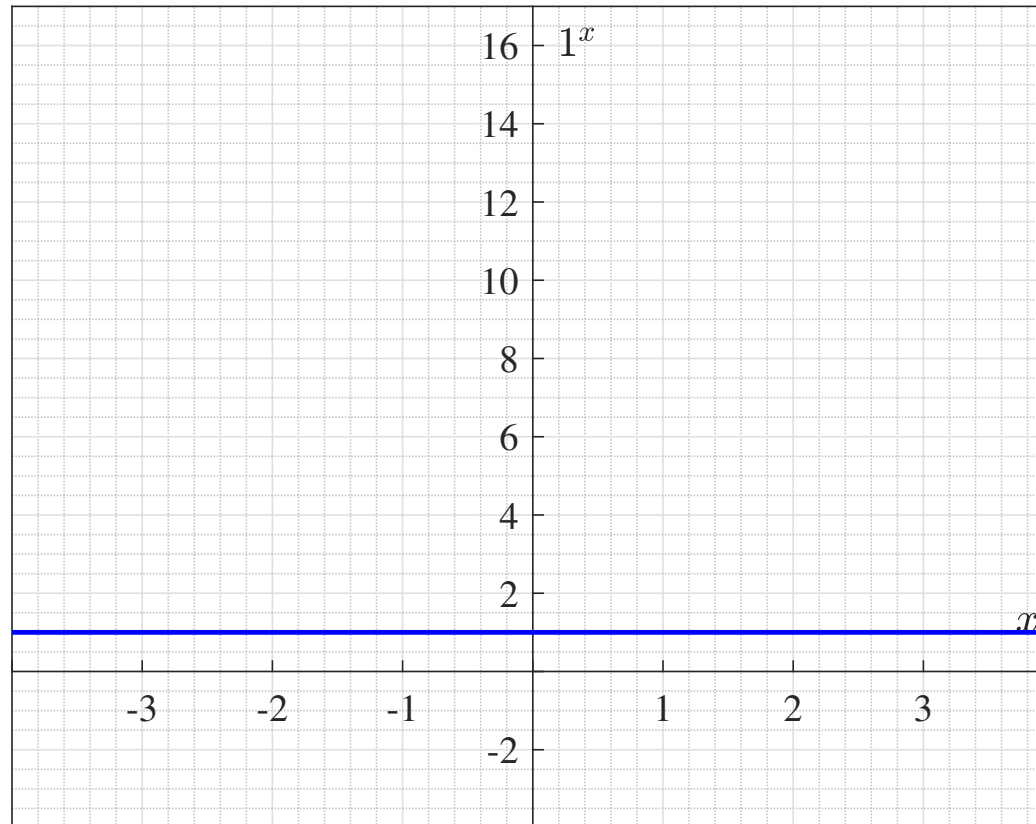
指数関数とそのグラフ (5/6)

- 底が $0 < a < 1$ なら, a^x は単調減少.
 - x が正のとき, $a > b$ なら $a^x > b^x$.
 - x が負のとき, $a > b$ なら $a^x < b^x$.



指数関数とそのグラフ (6/6)

- 底が $a = 1$ なら, a^x は恒等的に 1 です.
- そこで, 以下では, $a \neq 1$ とします.



ネイピア数を底とする指数関数

- ネイピア数（自然対数の底） $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

（注：「対数」とは何かについては，このあと扱います）

（注：記号 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ は，§ 4-1-3 で扱います）

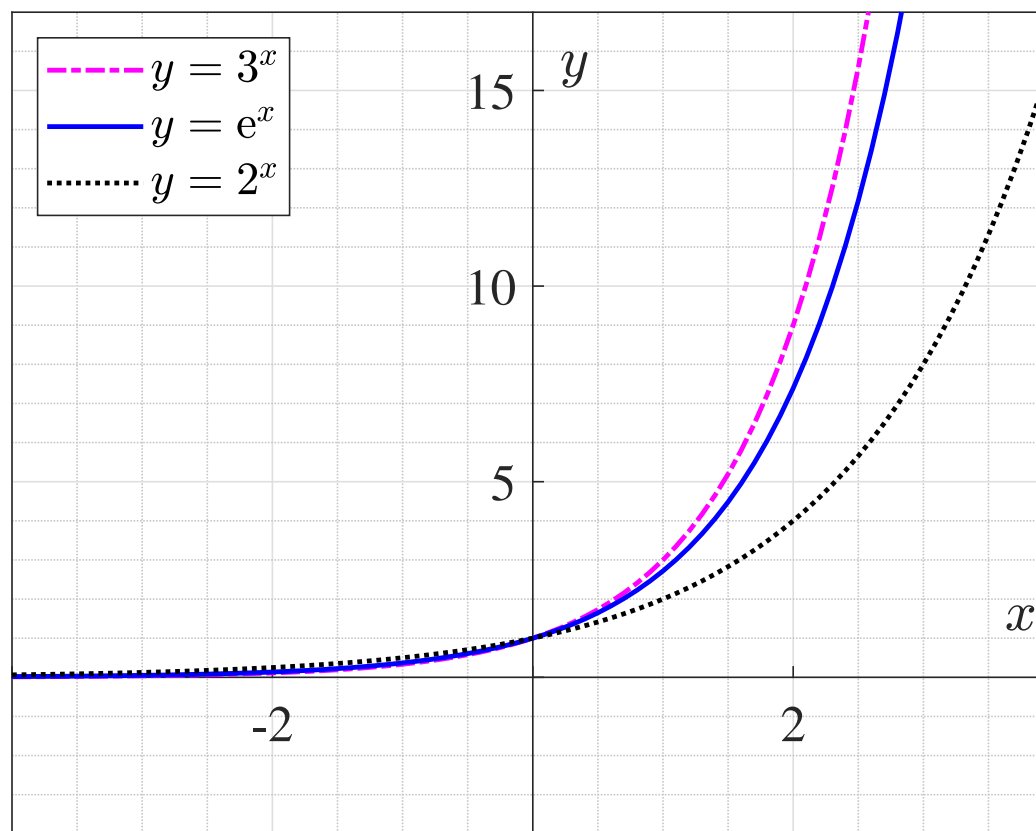
（⇔ スライド 72）

- 無理数（つまり，整数の比では表せない実数）であり， $e = 2.71828 \dots$.
- e^x のことを， $\exp(x)$ と書きます.
- （ある意味で）一番基本的な指数関数

（注：「基本的」の意味は，§ 4-1-3 で明らかになります；⇔ スライド 68）

ネイピア数を底とする指数関数のグラフ

- x が正のとき, $2^x < e^x < 3^x$. ($2 < e < 3$ なので)
- x が負のとき, $2^x > e^x > 3^x$.



指数関数は どういうところに現れるでしょうか (1/3)

- 等比級数

- 初項 a , 項比 r として, $a, ar, ar^2, \dots, ar^{x-1}$.

- 正月にねずみの ^{つがい}番が, 雌雄同数の子 12 匹生むとします (全部で 14 匹となる). 2 月には, 親と子が一対あたり 12 匹生んで, 全部で 98 匹になります. このように, 月に一度ずつ, すべての番が 12 匹ずつを生むとすると, 12 月末には全部で何匹になるでしょうか.

→ $a = 2, r = 7, x = 12,$

つまり, $2, 14, 98, 686, 4802, 33614, \dots, 3954653486.$

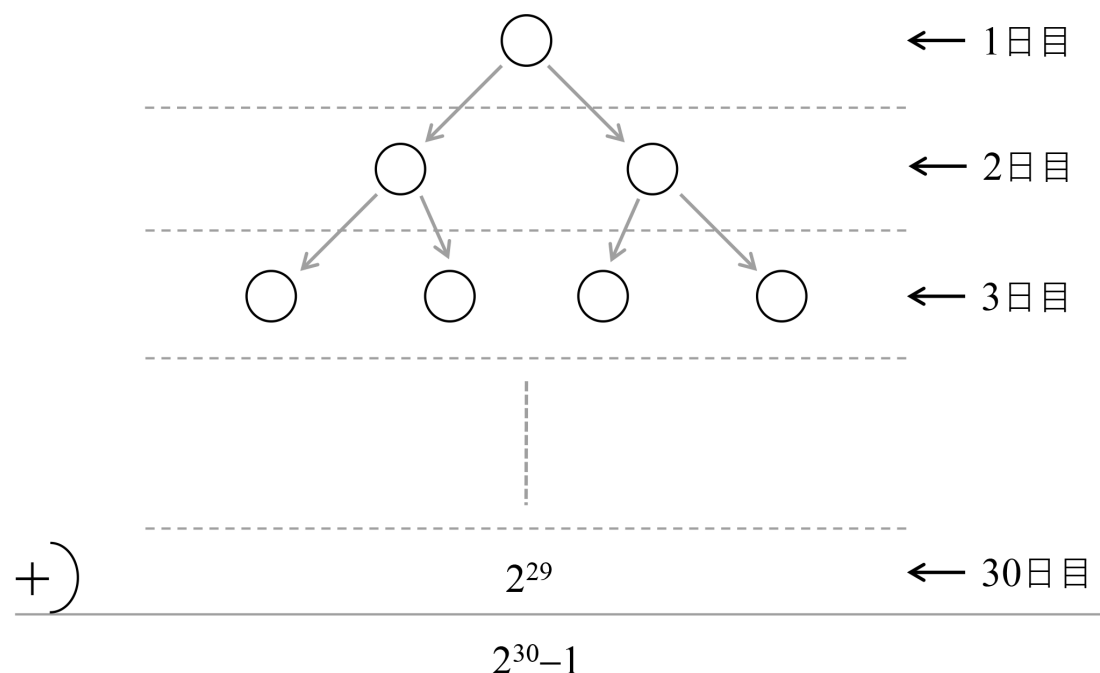
指数関数は どういうところに現れるでしょうか (2/3)

- 等比級数の和（いわゆる「ねずみ算」）

- $$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{x-1} = \frac{a}{r-1}r^x - \frac{a}{r-1}.$$

- 1 日目にお小遣いを 1 円もらい, 2 日目はその 2 倍の 2 円, 3 日目には前の日の 2 倍の 4 円をもらおうとします. このように, 前の日の 2 倍の金額をもらおうとすると, 30 日目には全部でいくらもらったことになるでしょうか.

→ $a = 1, r = 2, x = 30.$

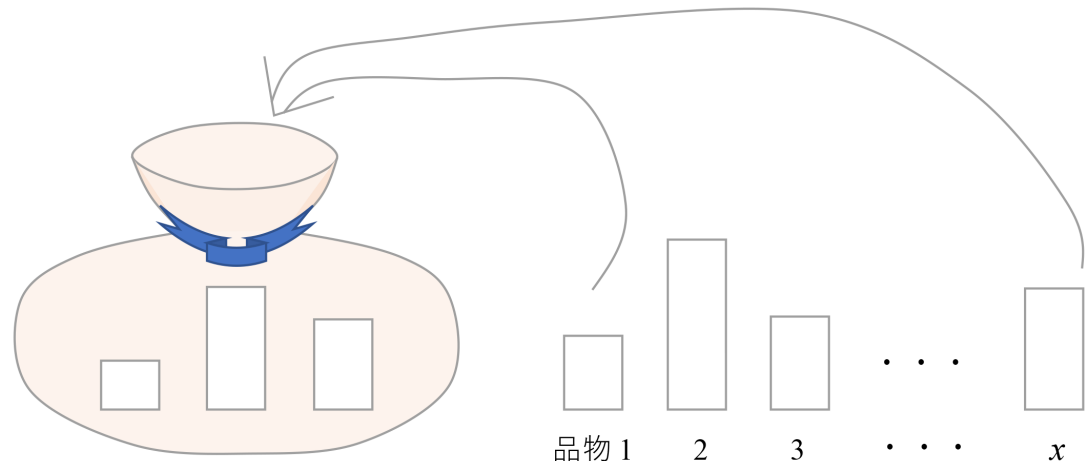


指数関数は どのところに現れるでしょうか (3/3)

- 組合せ

- 例として、ナップサック問題：

- 品物が x 個あり，いくつかを選んで1つのナップサックに詰めるとします．それぞれの品物には，重量と価格が与えられています．ナップサックには重量制限があり，詰め込んだ品物の重量の総和がその制限を超えてはいけません．このとき，ナップサックの中の品物の価格の総和が最大になるように，詰める品物を選びます．
- それぞれの品物をナップサックに入れるか入れないかを決める問題ですので，解の候補は全部で 2^x 個あります．
→ x が少し増えると，解の候補を列挙して解くことは現実的には不可能です．



対数関数の定義

- 対数関数は、指数関数の逆関数です.

- 具体例 :

$$\begin{array}{lll} 10^0 = 1 & \Leftrightarrow & \log_{10} 1 = 0 \\ 10^1 = 10 & \Leftrightarrow & \log_{10} 10 = 1 \\ 10^2 = 100 & \Leftrightarrow & \log_{10} 100 = 2 \\ 10^5 = 100000 & \Leftrightarrow & \log_{10} 100000 = 5 \end{array}$$

- おおまかに言うと, $\log_{10} y$ は「 y の桁数 -1 」に対応する数です.
- 一般に, $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$.
- $\log_a y$ のことを, a を底とする y の対数とよびます.
 - ただし, $y > 0, a > 0, a \neq 1$.
- 10 を底とする対数 $\log_{10} x$ を, 常用対数とよびます.

常用対数

- $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$ (したがって, $a^{\log_a y} = y$)
- $\log_{10} x$ は, $x = 1, 10, 100, \dots$ に対して, 「桁数 -1 」 でした.
- x が一般の数のとき,
 - 例: $\log_{10} 2000 = ?$
 - $2000 = 10^3 \times 2$ (4 桁) なので, $3 < \log_{10} 2000 < 4$.
 - $\log_{10} 2000 = \log_{10}(10^3 \times 10^{\log_{10} 2}) = \log_{10} 10^{3+\log_{10} 2} = 3 + \log_{10} 2$.
 - $10^{1/4} = \sqrt[4]{10} \simeq 1.78$ と $10^{1/3} = \sqrt[3]{10} \simeq 2.15$ から見当をつけることができます.
 $10^{1/4} < 2 < 10^{1/3}$ なので, $1/4 < \log_{10} 2 < 1/3$.
 - 実は常用対数表というものがあり, $\log_{10} 2 \simeq 0.3010$ と書いてあります.
 - したがって, $\log_{10} 2000 \simeq 3.3010$.
 - 整数部分の 3 は, やはり, 「2000 の桁数 -1 」 を表していることがわかります.

常用対数

- $\log_{10} x$ は, $x = 1, 10, 100, \dots$ に対して, 「桁数 -1 」.

- x が 1 より小さいとき,

- 具体例 :

$$\begin{array}{lll} 10^{-1} = 0.1 & \Leftrightarrow & \log_{10} 0.1 = -1 \\ 10^{-2} = 0.01 & \Leftrightarrow & \log_{10} 0.01 = -2 \\ 10^{-3} = 0.001 & \Leftrightarrow & \log_{10} 0.001 = -3 \end{array}$$

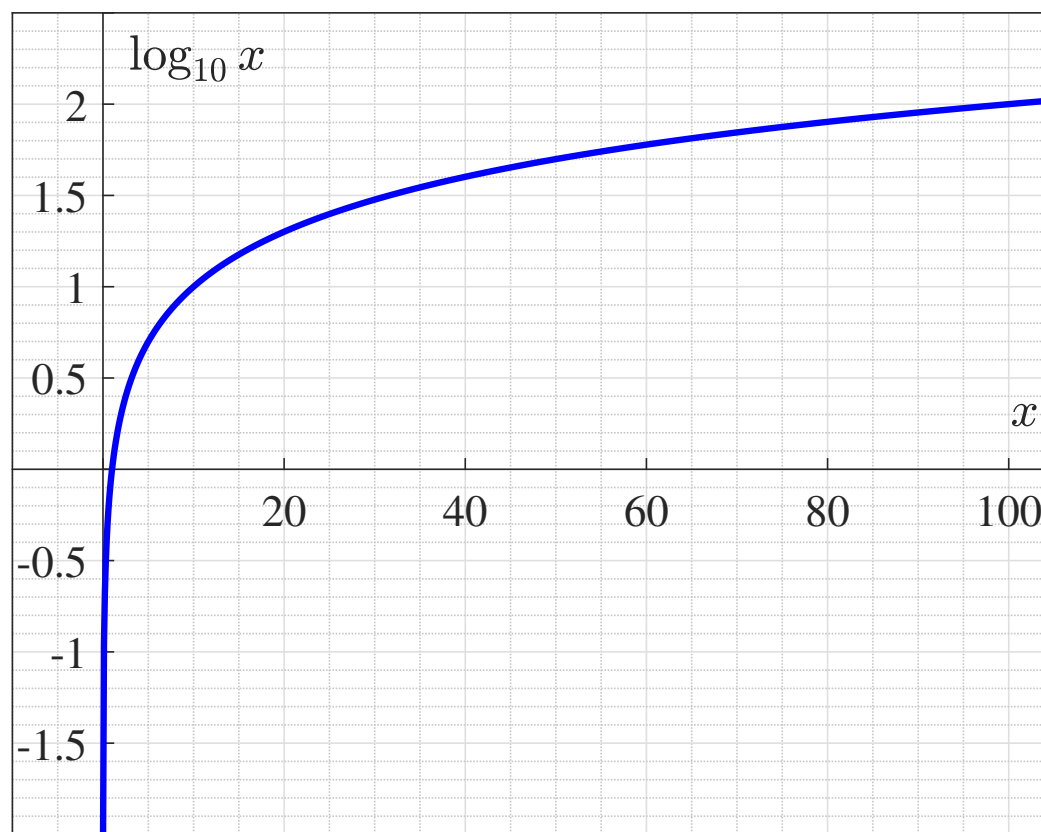
- x が一般の数するとき,

- 例 : $\log_{10} 0.002 = ?$

- $0.002 = 10^{-3} \times 2$ なので, $-3 < \log_{10} 0.002 < -2$.
- $\log_{10} 0.002 = \log_{10}(10^{-3} \times 10^{\log_{10} 2}) = \log_{10} 10^{-3+\log_{10} 2} = -3 + \log_{10} 2$.
- $\log_{10} 2 \simeq 0.3010$ でしたので, $\log_{10} 0.002 \simeq -2.6990$.

常用対数のグラフ

- 定義域 $x > 0$ において, 単調増加です.
- x が大きくなるにつれて, $\log_{10} x$ はゆるやかに増加します.
- x が 0 に近づくにつれて, $\log_{10} x$ は無限小へ (軸 $x = 0$ が漸近線) .



10 以外を底とする対数の概要：底が 2 の例

- $\log_2 x$ の具体例：

$$2^1 = 2 \quad 2 \text{ 進法で } (10)_2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 2 = 1$$

$$2^2 = 4 \quad 2 \text{ 進法で } (100)_2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 4 = 2$$

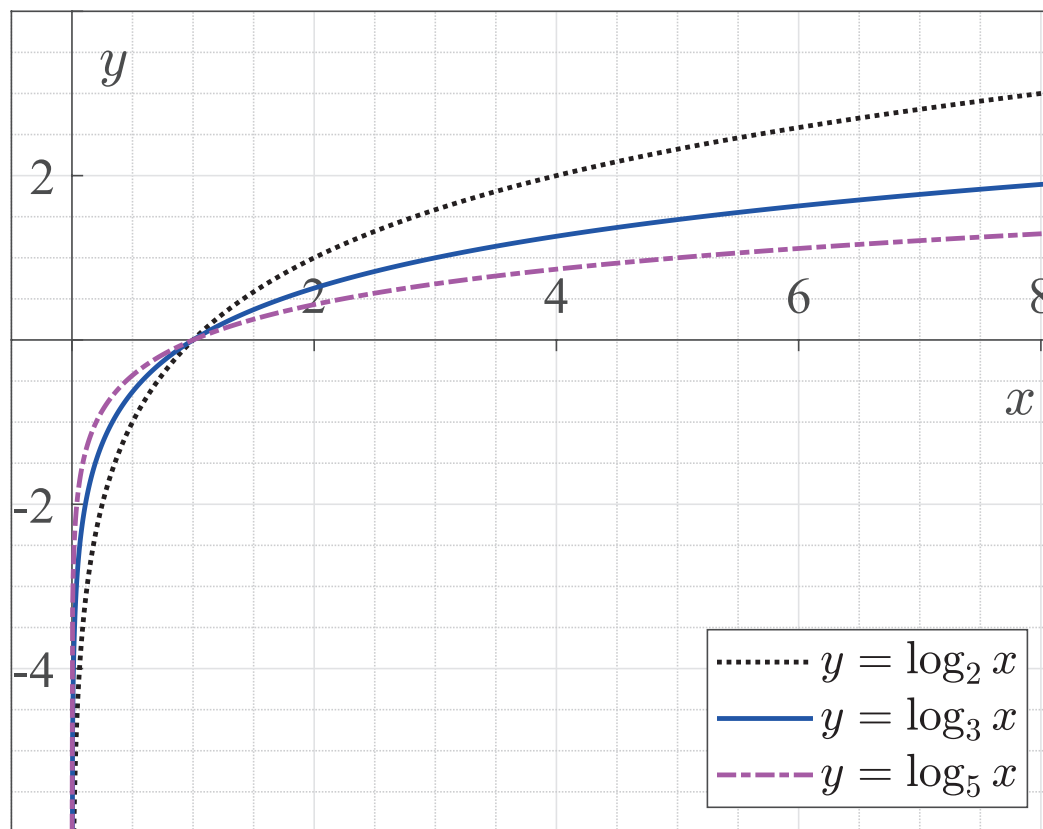
$$2^3 = 8 \quad 2 \text{ 進法で } (1000)_2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 8 = 3$$

$$2^4 = 16 \quad 2 \text{ 進法で } (10000)_2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 16 = 4$$

- つまり、 $\log_2 x$ は「 x の 2 進法での桁数 -1 」に対応します.
- x が一般の数するとき,
 - 例： $\log_2 5 = ?$
 - $5 = 2^2 + 1$ なので、 $2 < \log_2 5 < 3$.
 - このあと具体的な数値を求めるには、発展的な内容を必要としますので、ひとまずこの程度の大雑把な理解でとどめておきましょう.
- 一般に、 $\log_a x$ は、「 x の a 進法での桁数 -1 」に対応するような数です.
 - x が大きいほど、桁数の概数 $\log_a x$ は大.
 - a が大きいほど、桁数の概数 $\log_a x$ は小.

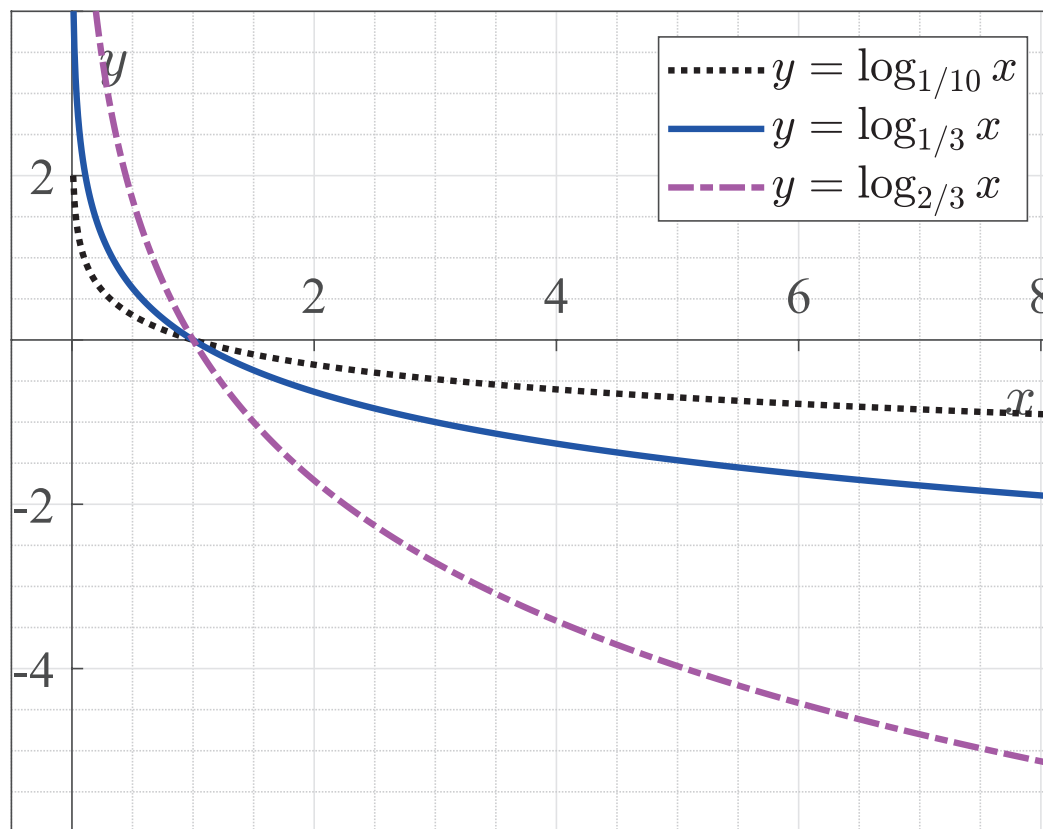
対数関数のグラフ (1/2)

- 底が $a > 1$ なら, $\log_a x$ は単調増加です.
 - $x > 1$ のとき, $a > b$ なら $\log_a x < \log_b x$.
 - $0 < x < 1$ のとき, $a > b$ なら $\log_a x > \log_b x$.



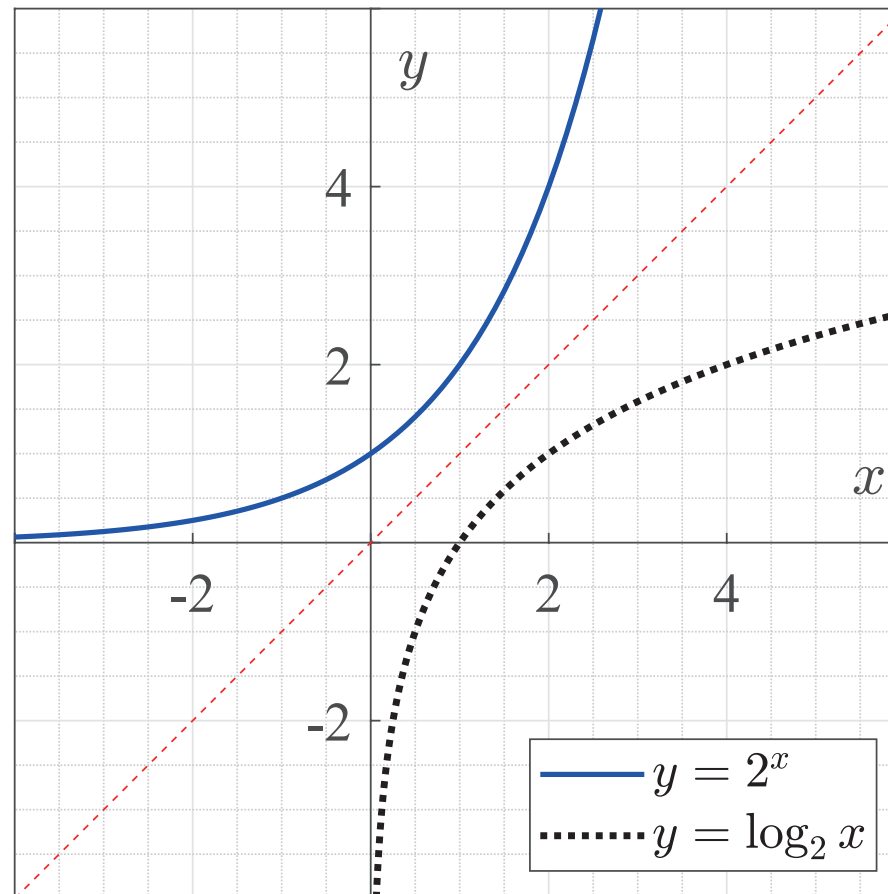
対数関数のグラフ (2/2)

- 底が $0 < a < 1$ なら, $\log_a x$ は単調減少です.
 - $x > 1$ のとき, $a > b$ なら $\log_a x < \log_b x$.
 - $0 < x < 1$ のとき, $a > b$ なら $\log_a x > \log_b x$.



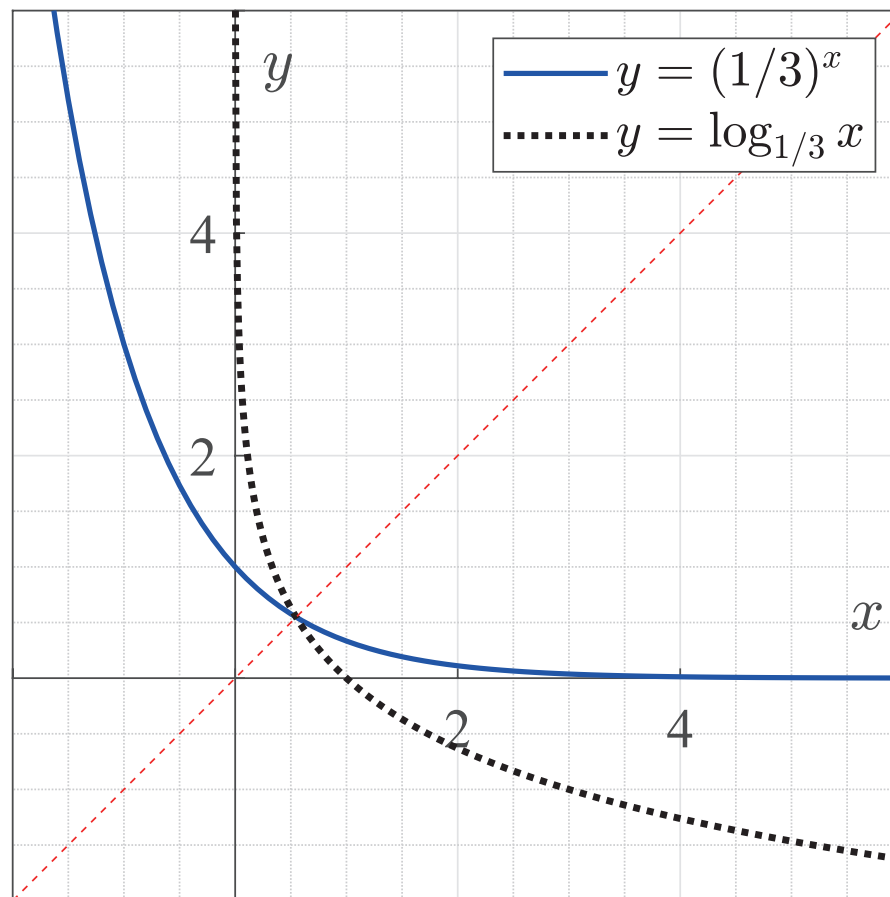
指数関数と対数関数のグラフ (1/2)

- $y = a^x$ のグラフと $y = \log_a x$ のグラフは, $y = x$ に関して対称です.
(互いに逆関数の関係にあるという事実によります)
- 底が $a > 1$ のとき :



指数関数と対数関数のグラフ (2/2)

- $y = a^x$ のグラフと $y = \log_a x$ のグラフは, $y = x$ に関して対称です.
(互いに逆関数の関係にあるという事実によります)
- 底が $0 < a < 1$ のとき :



対数の基本的な公式

1. $\log_a y^n = n \log_a y.$

(「 n 乗して対数をとる」は, 「対数をとってから n 倍」と同じ)

- $\because$ 対数の定義 “ $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$ ” より,
 $y^n = a^{nx} \Leftrightarrow \log_a y^n = nx = n \log_a y.$

2. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$ (底の変換)

- $\because x = a^{\log_a x}$ の両辺に対して b を底とする対数进行と考えると,
 $\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_b a.$

(注) 記号 $\because$ は, 「なぜならば」を意味します.

対数の基本的な公式

1. $\log_a y^n = n \log_a y.$

(「 n 乗して対数をとる」は, 「対数をとってから n 倍」と同じ)

- $\because$ 対数の定義 “ $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$ ” より,
 $y^n = a^{nx} \Leftrightarrow \log_a y^n = nx = n \log_a y.$

2. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$ (底の変換)

- $\because x = a^{\log_a x}$ の両辺に対して b を底とする対数进行と考えると,
 $\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_b a.$
- “ $\log_2 5 = ?$ ” に戻ると,
 - 底の変換により, $\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}.$ ($\log_{10} 2$ は, 計算済み)
 - 残るは, $\log_{10} 5 = \log_{10}(10 \times 10^{\log_{10} 2^{-1}}) = \log_{10} 10^{1+\log_{10} 2^{-1}} =$
 $1 + \log_{10} 2^{-1} = 1 - \log_{10} 2.$ したがって, $\log_2 5 \simeq \frac{1 - 0.301}{0.301} \simeq 2.322.$

自然対数

- ネイピア数 e を底とする対数 $\log_e x$ のこと.
 - $e = 2.71828 \dots$ でした.
 - $\log_e x$ のことを, 単に $\log x$ とも書きます.
 - ただし, 工学では, 常用対数 $\log_{10} x$ のことを $\log x$ と書き, 自然対数 $\log_e x$ のことを $\ln x$ と書くことがあります.

対数の性質のまとめ

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
- $\log_a(x^z) = z \log_a x$.
- $\log_a 1 = 0$.
- $\log_a a = 1$.
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.
- 以上は、指数関数の性質から、自然に導かれます.
 - 既に、これまでのスライドで、本質的なところは確認しました.

指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (1/7)

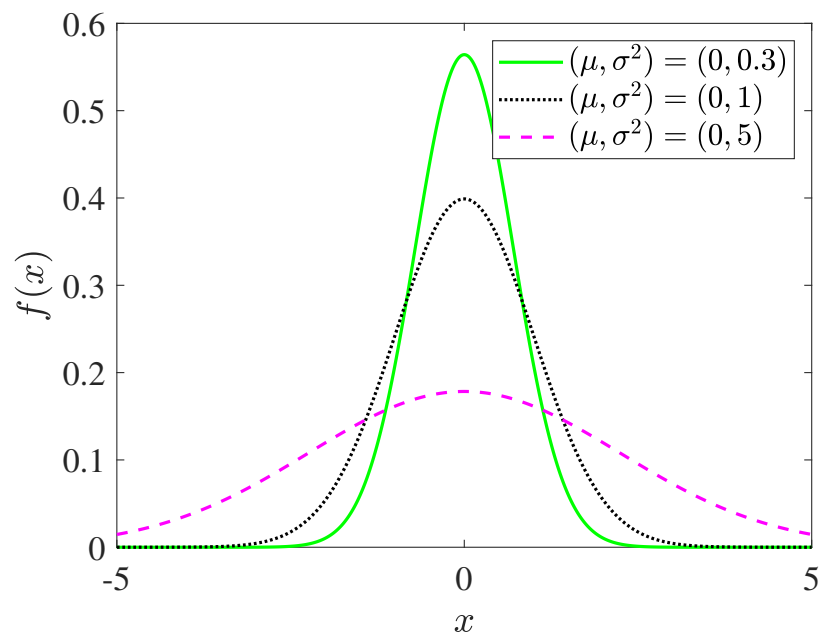
- データの対数変換 (⇨ § 4-4)
 - 株価, 破壊確率, 雨量などのデータは, その対数をとると, 正規分布に (近く) なります.
 - 正規分布は何かと便利な性質をもつので, このようなデータは対数に変換してから扱うと扱い易いです.
- 回帰分析 (⇨ § 4-7) における最尤推定
 - 尤度関数を最大化する際に, その自然対数を考えれば最大化が容易になることが多いです.
 - 対数関数は単調増加ですので, 対数をとってから最大化しても, 元の関数を最大化したときと同じ解が得られます.

指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (2/7)

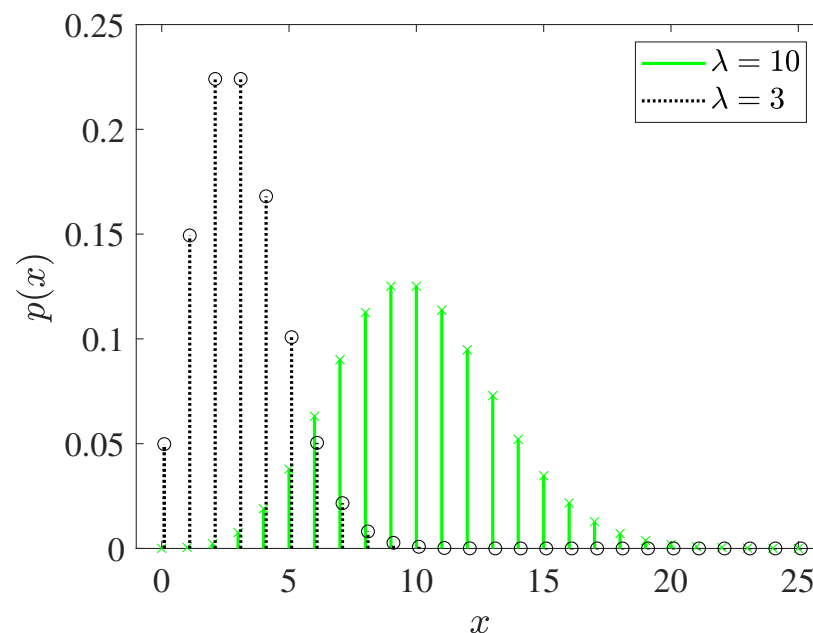
- 確率の分野 (⇨ § 4-1-4)

- 正規分布の確率密度関数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.

- ポアソン分布の確率関数 $P(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$.



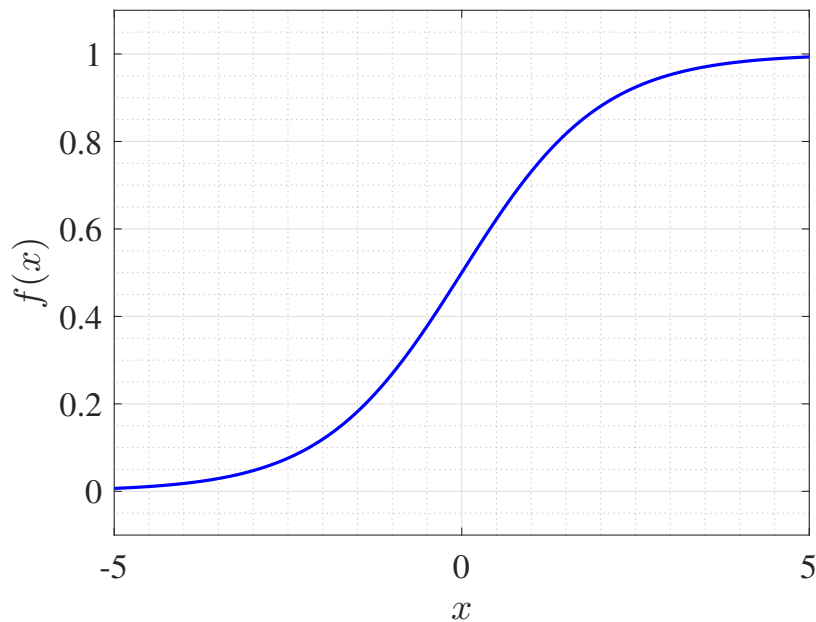
正規分布の確率密度関数



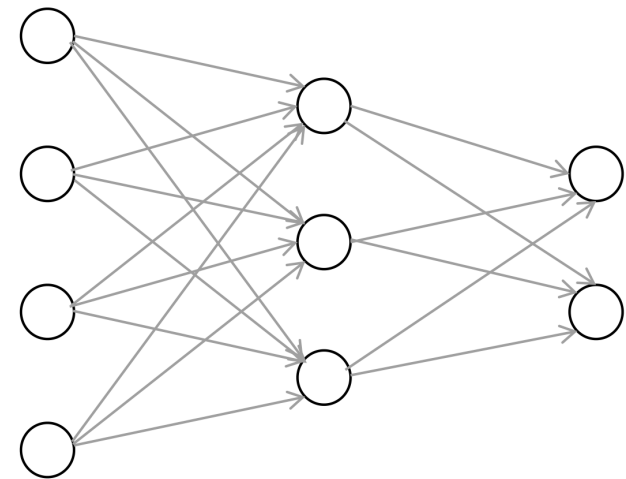
ポアソン分布の確率関数

指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (3/7)

- シグモイド関数（標準ロジスティック関数） $f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$.
- ニューラルネットワーク，深層学習（⇨ § 1-6）.



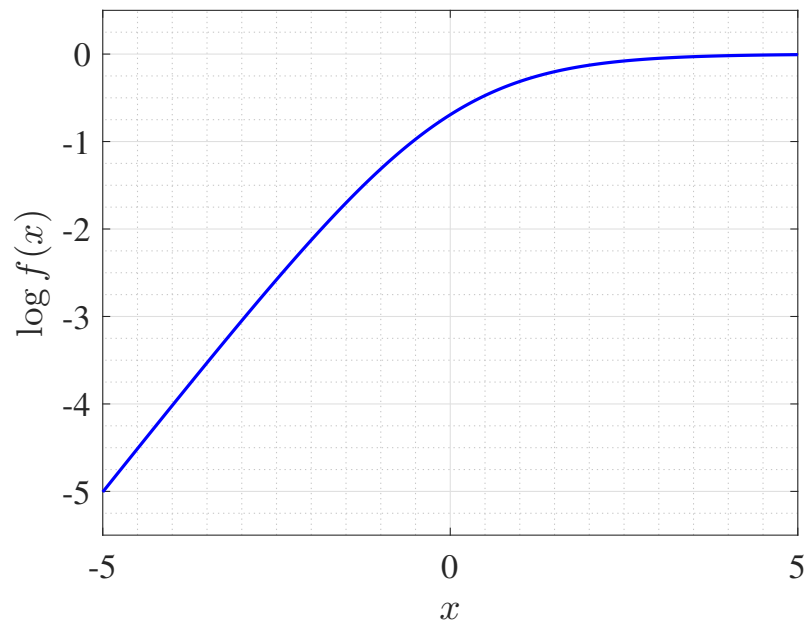
シグモイド関数



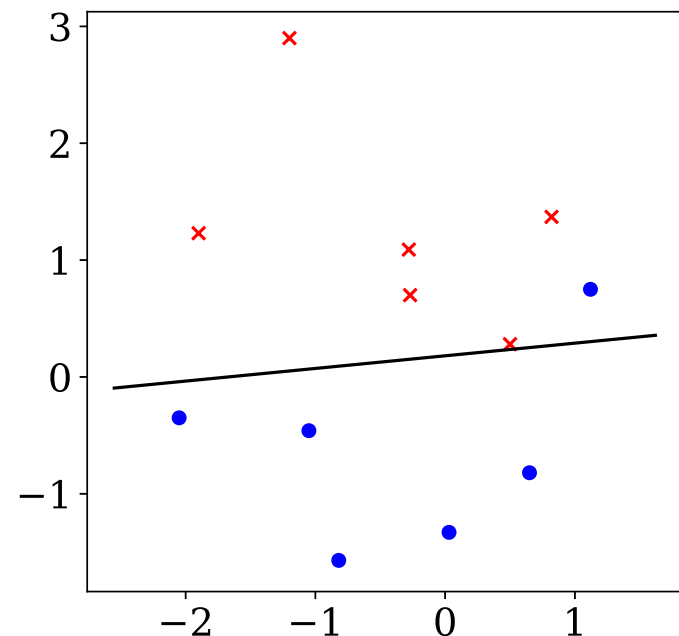
ニューラルネットワーク

指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (4/7)

- シグモイド関数（標準ロジスティック関数） $f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$.
- $\log f(x) = -\log(1 + \exp(-x))$ は, ロジスティック損失関数.
- ロジスティック回帰分析 (⇨ § 4-8) .



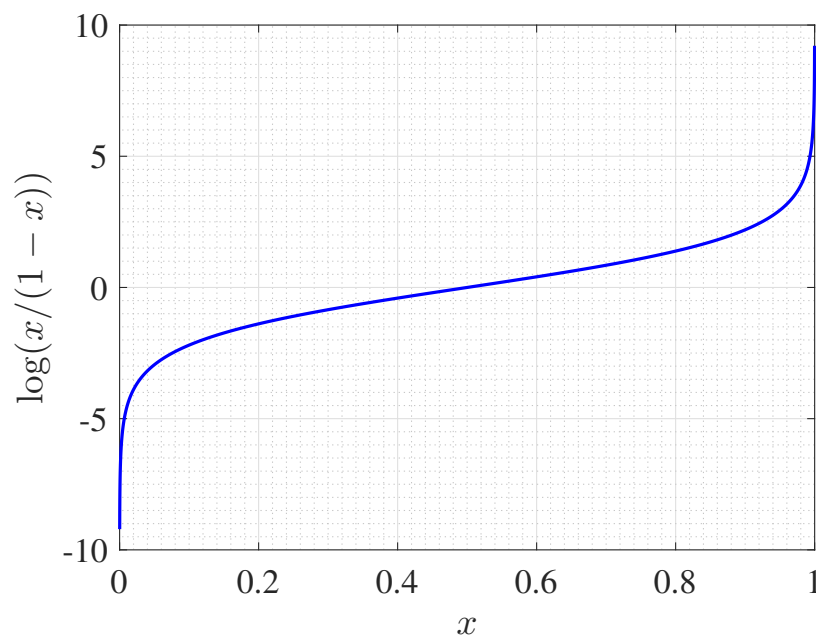
ロジスティック損失関数



ロジスティック回帰分析

指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (5/7)

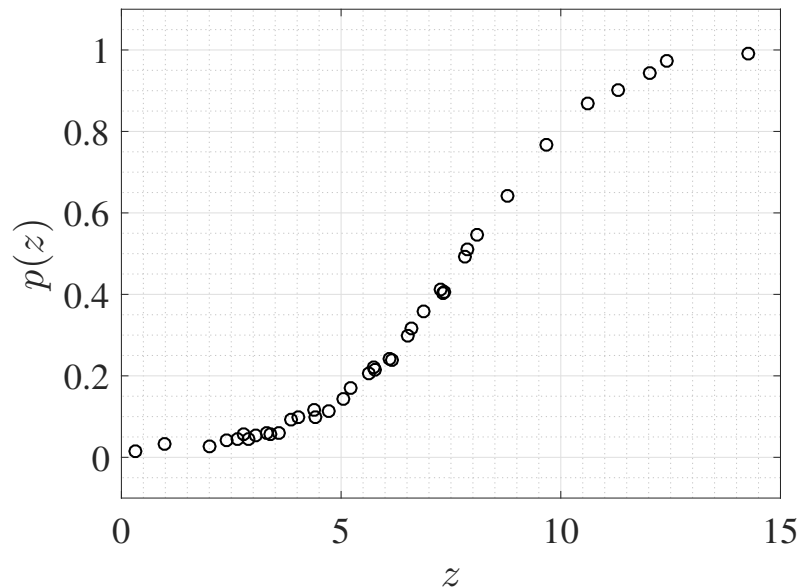
- ロジット関数 $\log\left(\frac{x}{1-x}\right)$.
- シグモイド関数の逆関数.
- ロジット変換 ($\Leftrightarrow$ § 4-4) .



ロジット関数

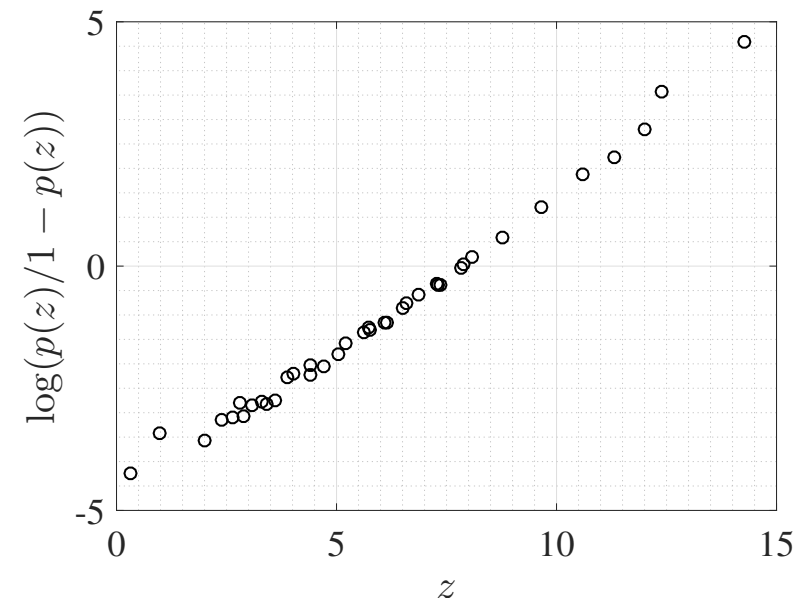
指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (5/7)

- ロジット関数 $\log\left(\frac{x}{1-x}\right)$.
- シグモイド関数の逆関数.
- ロジット変換 ($\Leftrightarrow$ § 4-4).



元のデータ

(例：ある機械の使用年数 z と
故障率 $p(z)$)

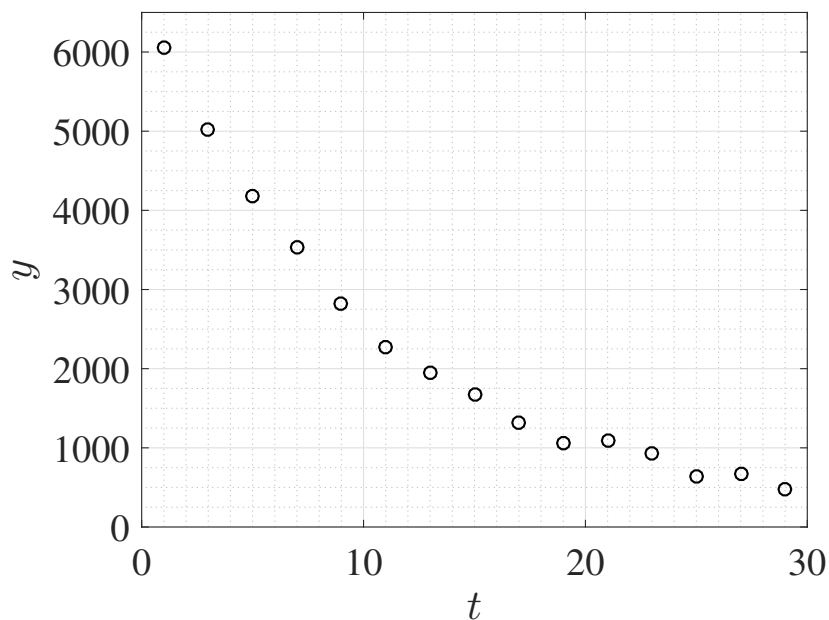


ロジット変換後のデータ

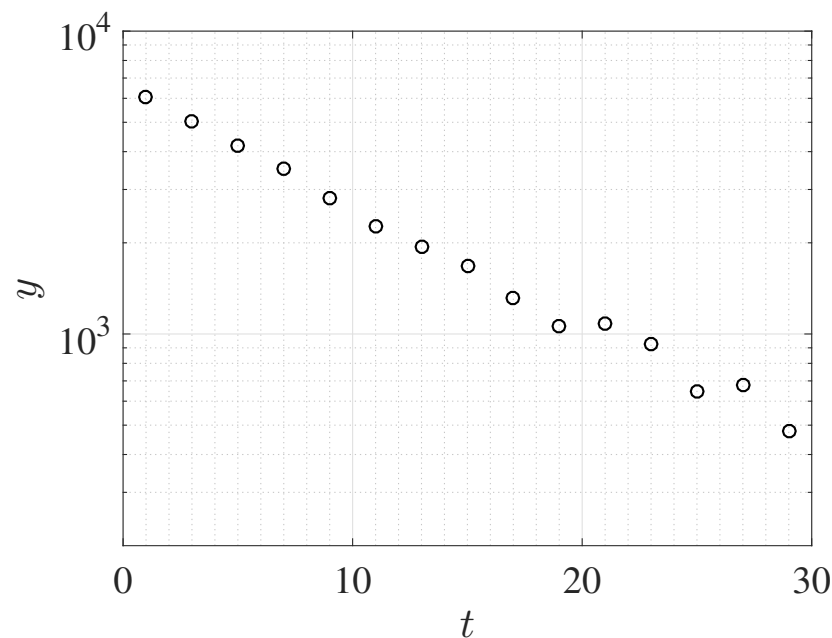
指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (6/7)

● 片側対数グラフ

- 例として, あるバクテリアは, X線を照射すると, 指数関数的に死滅します. つまり, 照射時間 t におけるバクテリアの生存数 y は, $y = ae^{-bt}$ ($a, b > 0$) と表せます.
- $\log y = \log a - bt$ ですから, 横軸を t , 縦軸を $\log y$ として生存数のデータをプロットすれば, ほぼ直線になります.



普通の軸のグラフ

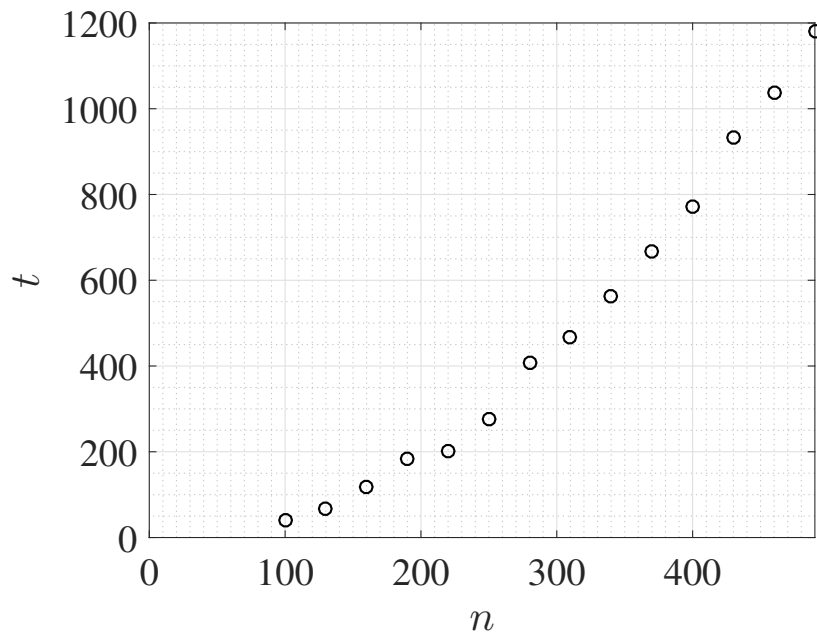


縦軸が対数軸のグラフ

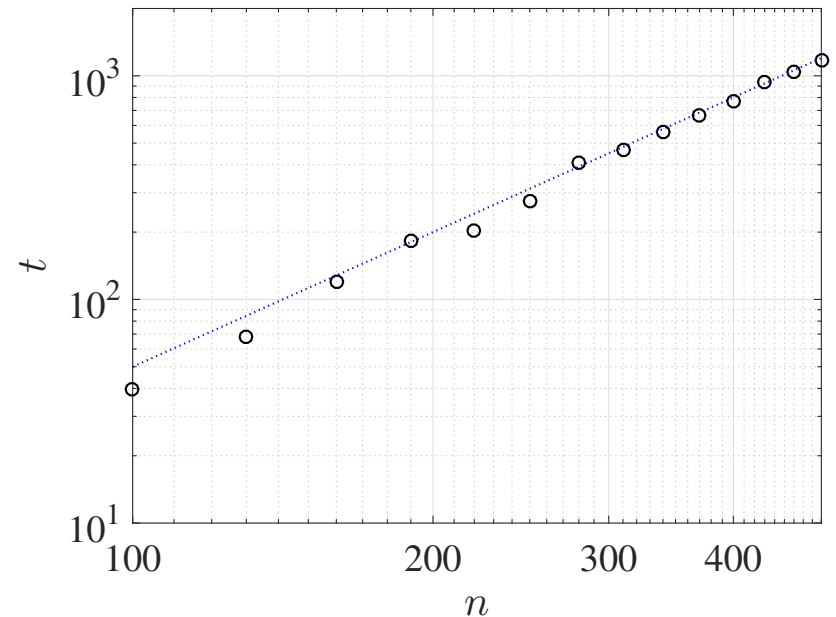
指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (7/7)

● 両側対数グラフ

- 例として, 計算量. 計算時間 t が問題のサイズ n に対して $t \simeq n^k$ のとき, $\log t \simeq k \log n$ ですから, 横軸を $\log t$, 縦軸を $\log n$ として計算時間をプロットすれば, 傾きから k が確認できます.



普通の軸のグラフ

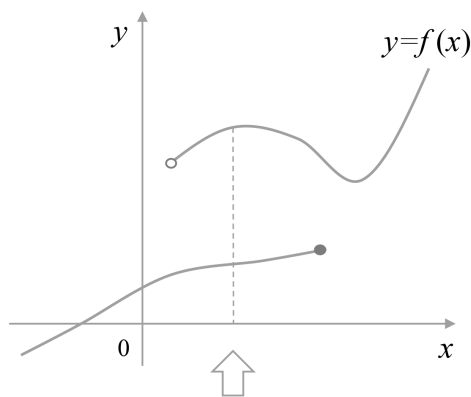


横軸と縦軸が対数軸のグラフ
(点線は n^2 の定数倍のグラフ)

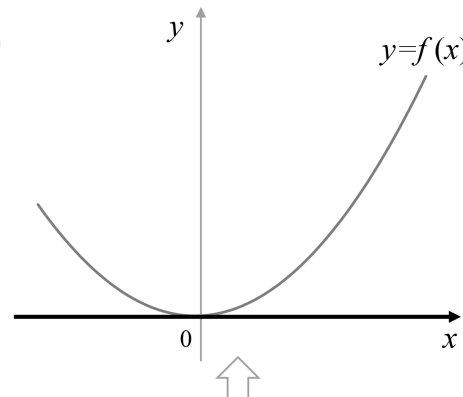
4-1-3 1 変数関数の微分と積分

(1 変数の) 関数とは

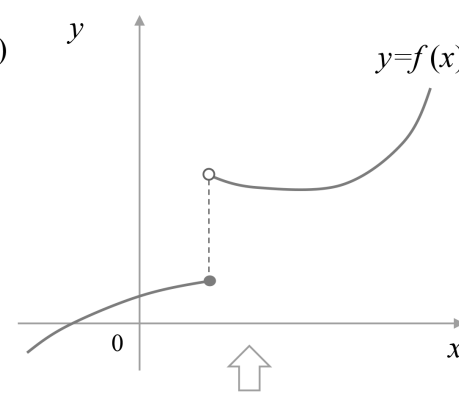
- 2つの変数 x と y があつたとき, x の値に応じて y の値が1つ定まるとき, y は x の関数であるといい, $y = f(x)$ のように表します.
- 変数 x の動く範囲を, 関数 f の定義域とよびます.
- 対応する x と y の値を座標平面にプロットしていくと, 関数 f のグラフが得られます.
- つまり, y 軸方向に見て, グラフが重なることがないものが, 関数です.
- また, y 軸方向に見て, グラフが「ある」範囲が, 定義域です.



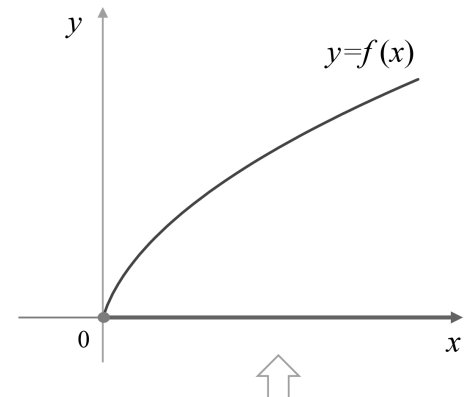
グラフが重なるので関数ではない



関数 $f(x) = x^2$
定義域は $\mathbb{R}$



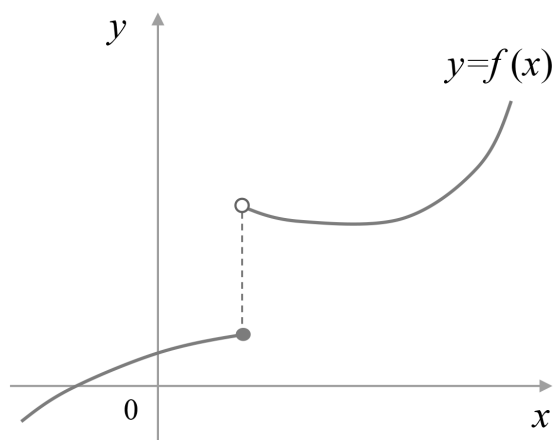
これも関数
定義域は $\mathbb{R}$



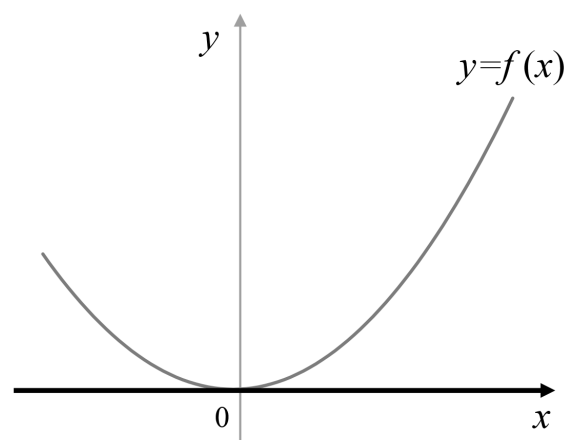
関数 $f(x) = \sqrt{x}$
定義域は $x \geq 0$

関数の連続性

- 関数 f のグラフ $y = f(x)$ が、各点でちゃんとつながっているとき、 f は連続であるといいます.
- つまり、鉛筆で紙にグラフを描くときに紙から鉛筆を離すことなく描けるものは、連続な関数です.



関数ではあるが連続ではない例



連続な関数の例

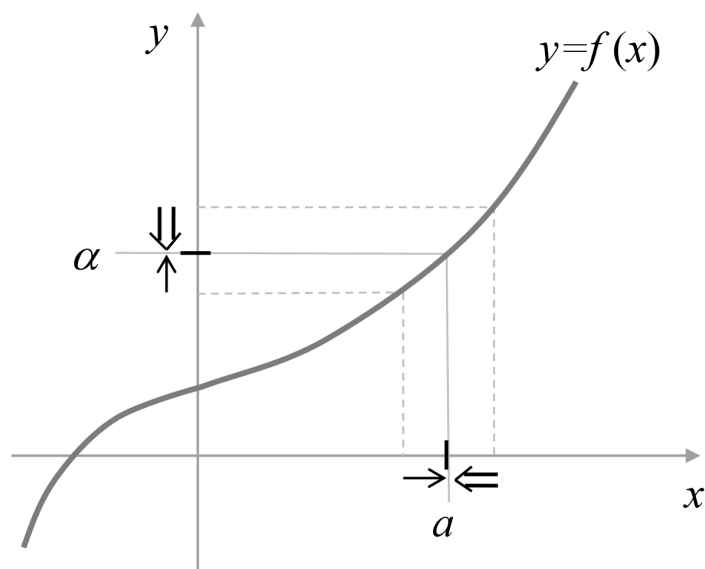
- 連続な関数の例：
 - 多項式で表される関数，たとえば， $3x^2 - 4x + 1$ ， $x^6 + 2x^3 + 5$.
 - 指数関数 a^x .
 - 対数関数 $\log_a x$ （定義域は $x > 0$ で， $a > 0$ ， $a \neq 1$ ） .

関数の極限值

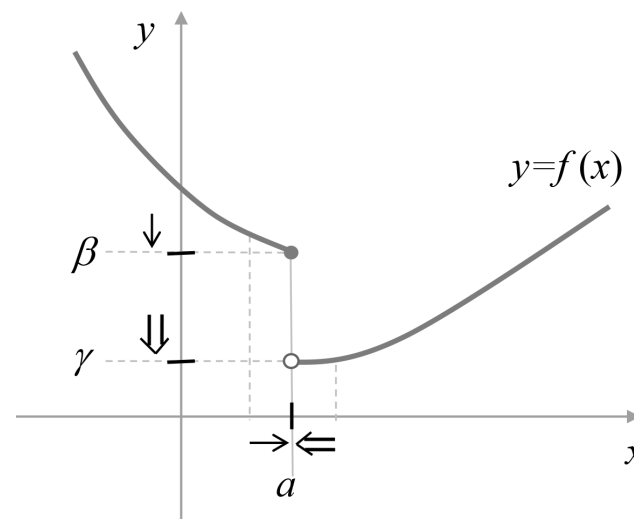
- 連続な関数 f と定数 a に対して, x を a に近づけたときに $f(x)$ がある 1 つの値 α に近づくとき,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \quad \text{や} \quad f(x) \rightarrow \alpha \quad (x \rightarrow a)$$

と表します. α のことを, x が a に近づくときの $f(x)$ の極限值とよびます.



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

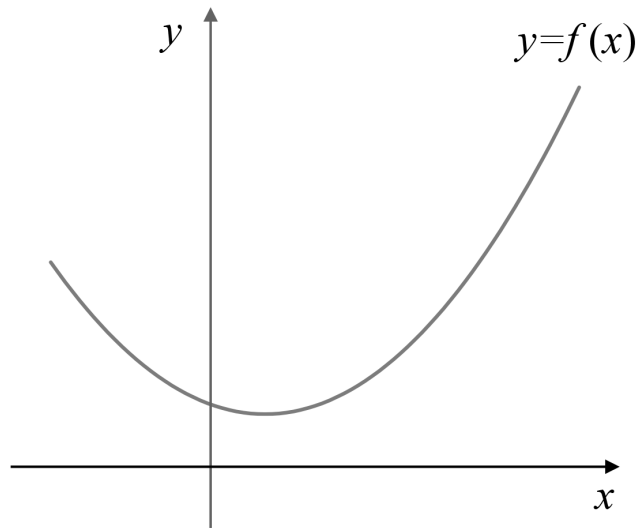


f が連続でない場合, 極限值は存在するとは限りません (この例では $\beta \neq \gamma$ なので, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は存在しません).

- f が多項式で表される関数であれば, 単に, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ です.

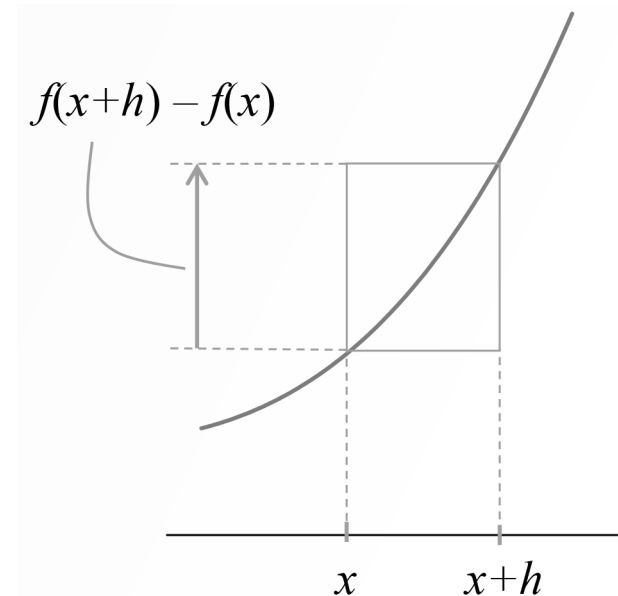
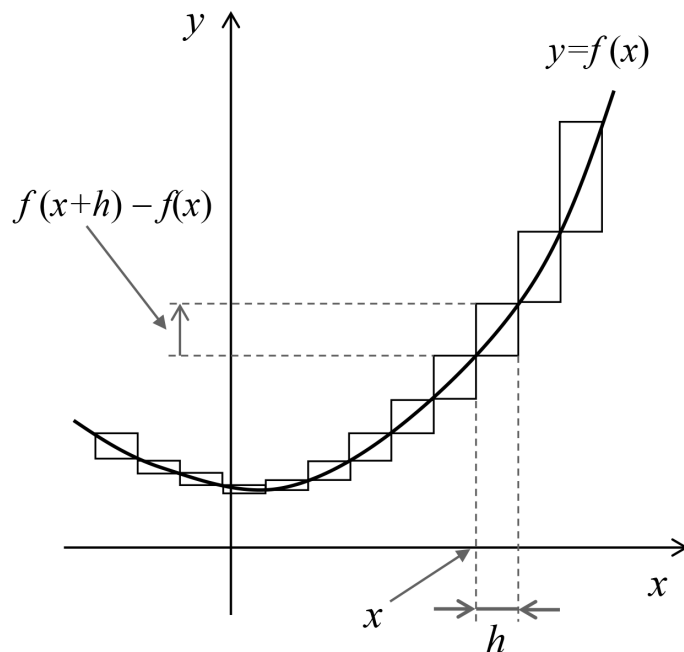
微分係数と導関数：導入

- 連続な関数のグラフ $y = f(x)$ について、その「傾き具合」を考えてみましょう.



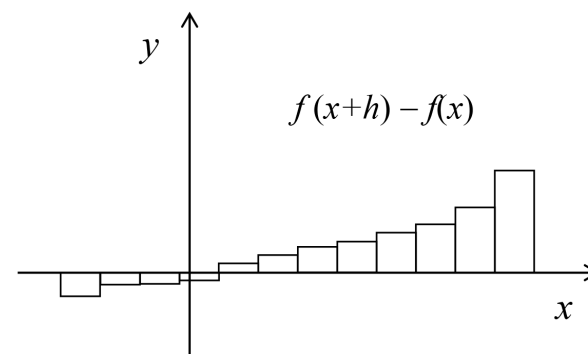
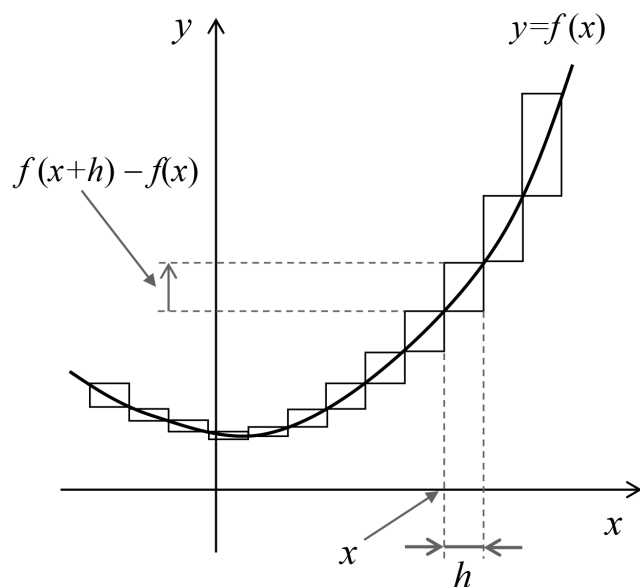
微分係数と導関数：導入

- 連続な関数のグラフ $y = f(x)$ について、その「傾き具合」を考えてみましょう.
- そのために、まず幅 h が一定のブロックを（その高さを調整しながら） $y = f(x)$ のグラフに沿うように並べていきます.
- この各ブロックの縦横の比（より正確には、 $\frac{(\text{縦の長さ})}{(\text{横の長さ})}$ ）が、グラフの「傾き具合」に対応していることに注目しておいて下さい.



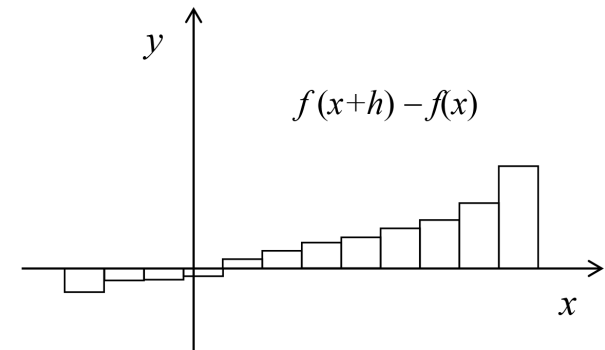
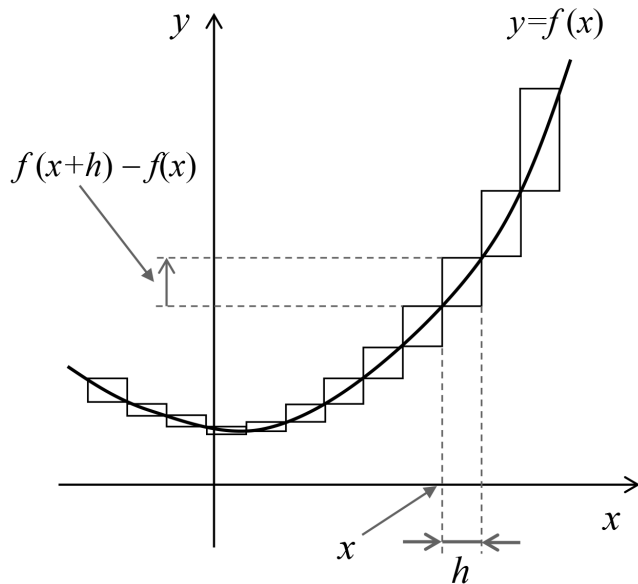
微分係数と導関数：導入

- これらのブロックをすべて x 軸上に並べます.

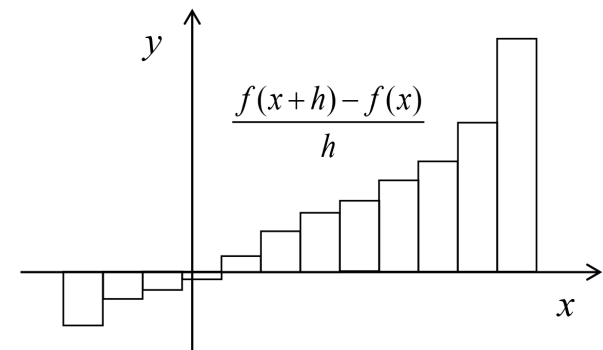


微分係数と導関数：導入

- ブロックの高さをすべて $\frac{1}{h}$ 倍します.

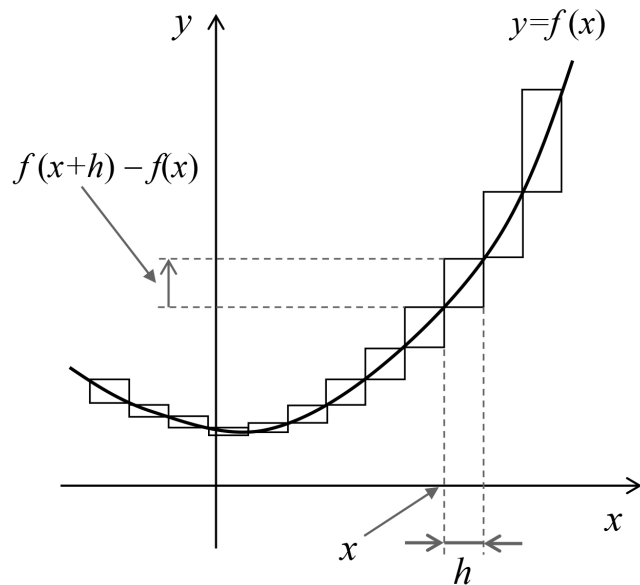


↓ (高さを $\frac{1}{h}$ 倍)

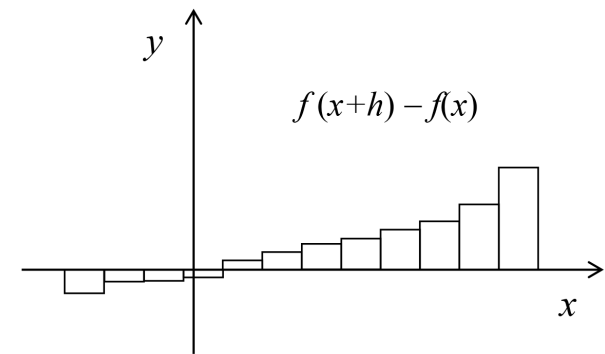


微分係数と導関数：導入

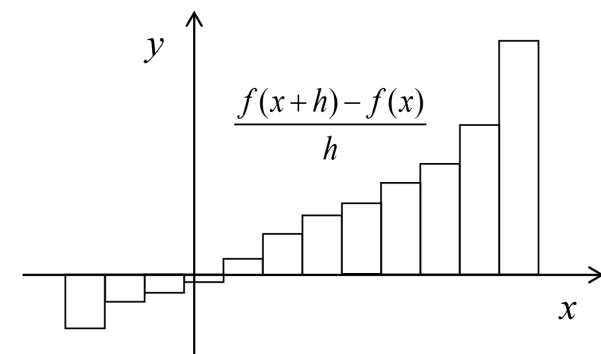
- $h \rightarrow 0$ としたときの縦軸の値を, $f'(x)$ で表します.



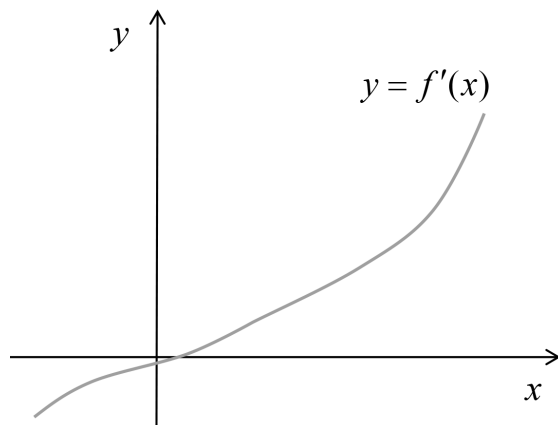
→



↓ (高さを $\frac{1}{h}$ 倍)

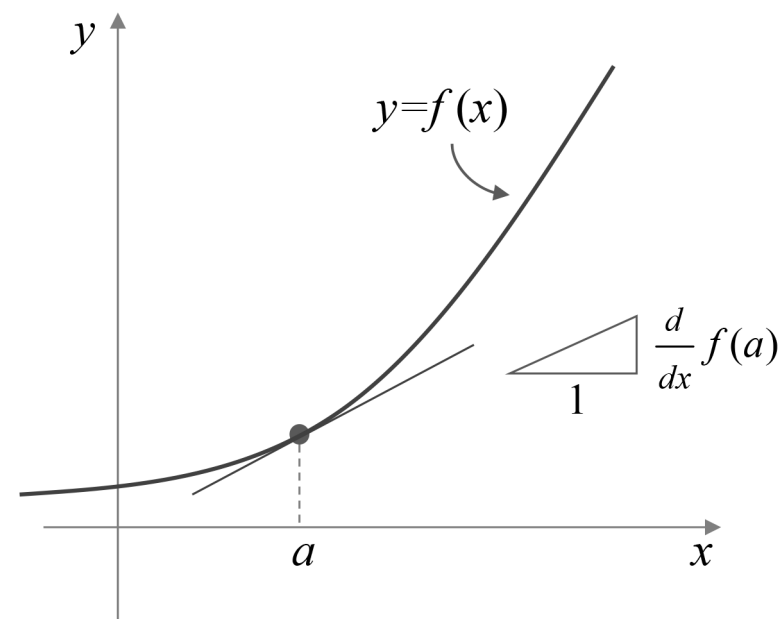
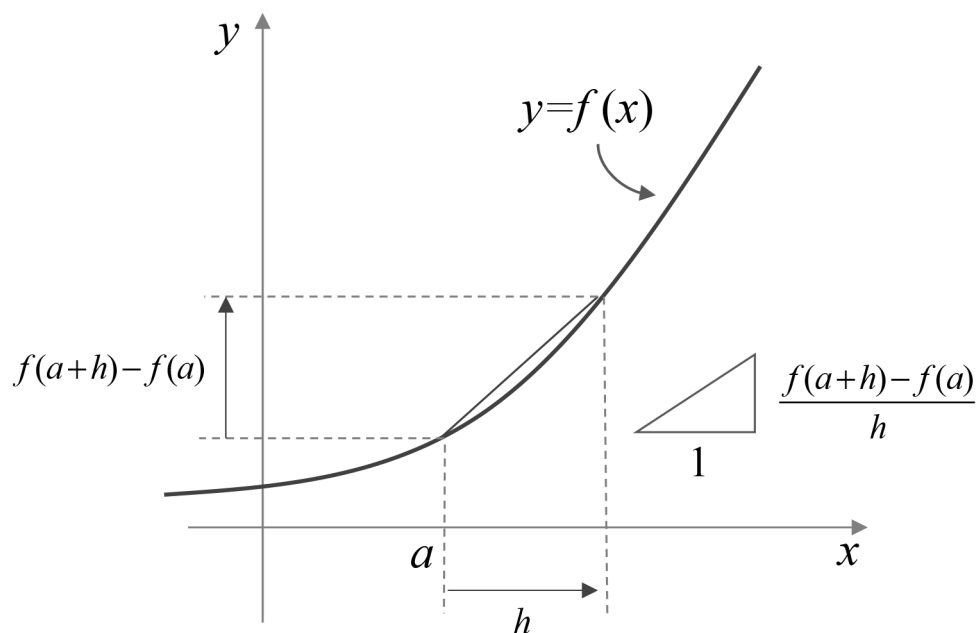


←
($h \rightarrow 0$
とします)



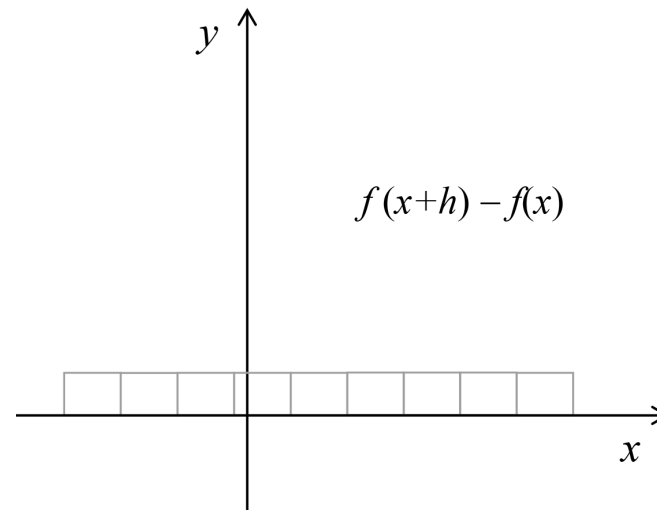
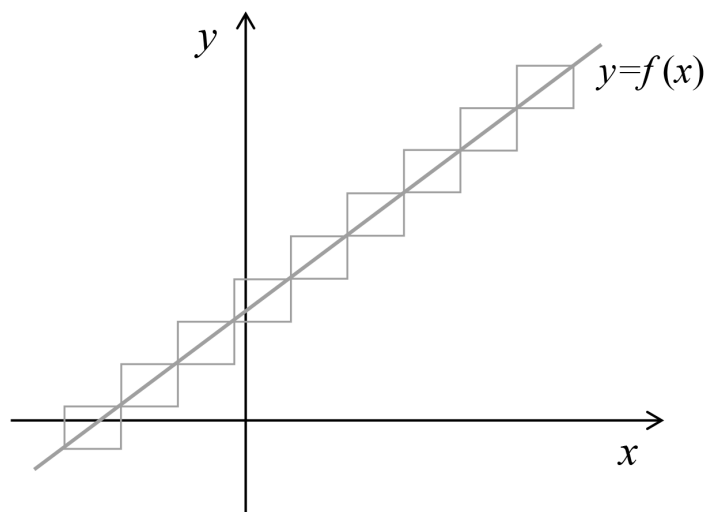
微分係数と導関数（要点）

- 関数 f と点 $x = a$ に対して、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ を f の a における微分係数とよび、 $f'(a)$ や $\frac{d}{dx}f(a)$ で表します.
- 関数 f' のことを、 f の導関数とよびます.
- 関数の微分係数や導関数を求めることを、微分するといいます.



簡単な関数の微分 (1/2)

- 1 次関数の導関数は、定数関数.
- $\therefore$ 「幅 h のブロック」を並べると、高さが共通 :



- 実際, $f(x) = px + q$ (p と q は実数) に対して,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ph}{h} = p.$$

(注) 記号 $\therefore$ は, 「なぜならば」 を意味します.

簡単な関数の微分 (2/2)

- 2 次関数の導関数は, 1 次関数.

- 基本的な場合として, $f(x) = x^2$ に対して $f'(x) = 2x$.

$$\because f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + \lim_{h \rightarrow 0} h = 2x.$$

- 3 次関数の導関数は, 2 次関数.

- 基本的な場合として, $f(x) = x^3$ に対して $f'(x) = 3x^2$.

$$\begin{aligned}\because f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - (x)^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= 3x^2 + \lim_{h \rightarrow 0} h(3x + h^2) = 3x^2.\end{aligned}$$

微分の諸公式

- $(f(x) + c)' = f'(x)$ (c は実数) .
 - $\therefore$ 「幅 h のブロック」の高さは, c に無関係.
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
 - $\therefore$ 「幅 h のブロック」の高さが, 関数値 $f(x)$ と $g(x)$ の和.
- $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$ (α は実数) .
 - $\therefore$ 「幅 h のブロック」の高さが, α 倍.
- $f(g(x))' = f'(g(x)) g'(x)$. (合成関数の微分法)
 - $\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} e \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= \lim_{g(x+h)-g(x) \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + (g(x+h) - g(x)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} .$$

いくつかの基本的な関数の微分 (1/2)

- 実は（説明は省きますが），実数 n に対して， $(x^n)' = nx^{n-1}$.
 - 例： $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.
 - 例： $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}$.
- 実は（説明は省きますが）， $(e^x)' = e^x$.
- 実は（説明は省きますが）， $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

いくつかの基本的な関数の微分 (2/2)

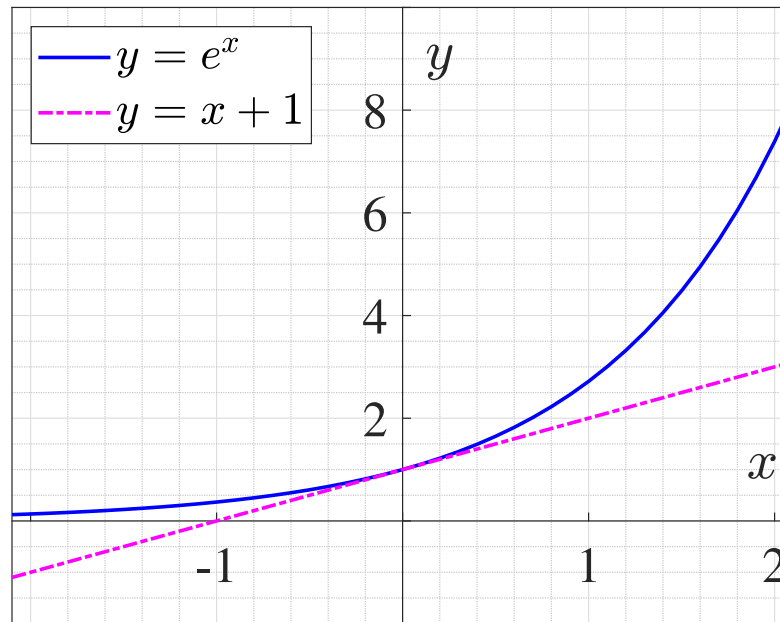
- 底が e 以外の指数関数や対数関数の微分は、係数が掛かります：
 - $(a^x)' = (\log a)a^x$.
 - $\because k = \log a$ とおくと, $e^k = a$. したがって, $a^x = (e^k)^x = e^{kx}$. 合成関数の微分法により, $(a^x)' = k e^{kx} = (\log a)a^x$.
 - $(\log_a x)' = \frac{1}{\log a} \frac{1}{x}$.
 - $\because$ 「底の変換」 $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ を行い, 両辺を微分します.
- 「微分した際に係数が掛からない」という意味で, e^x と $\log x$ は指数関数と対数関数の中でも基本的なものとみることができます.
 - ⇒ § 4-1-2 のスライド 28.

合成関数の微分法の使い方

- 公式は, $f(g(x))' = f'(g(x)) g'(x)$ でした.
- 例 : $h(x) = (3x^2 + 1)^4$ のとき, $h'(x) = 24x(3x^2 + 1)^3$.
 - $\because f(s) = s^4$, $g(x) = 3x^2 + 1$ とおけば, $h(x) = f(g(x))$.
ここで, f と g の微分は容易で, $f'(s) = 4s^3$, $g'(x) = 6x$,
さらに, $f'(g(x)) = 4(3x^2 + 1)^3$.
公式より, $f(g(x))' = 4(3x^2 + 1)^3 \cdot 6x$.
- $h(x) = 81x^8 + 108x^6 + 54x^4 + 12x^2 + 1$ と展開してから h' を計算するより, ずっと楽です.

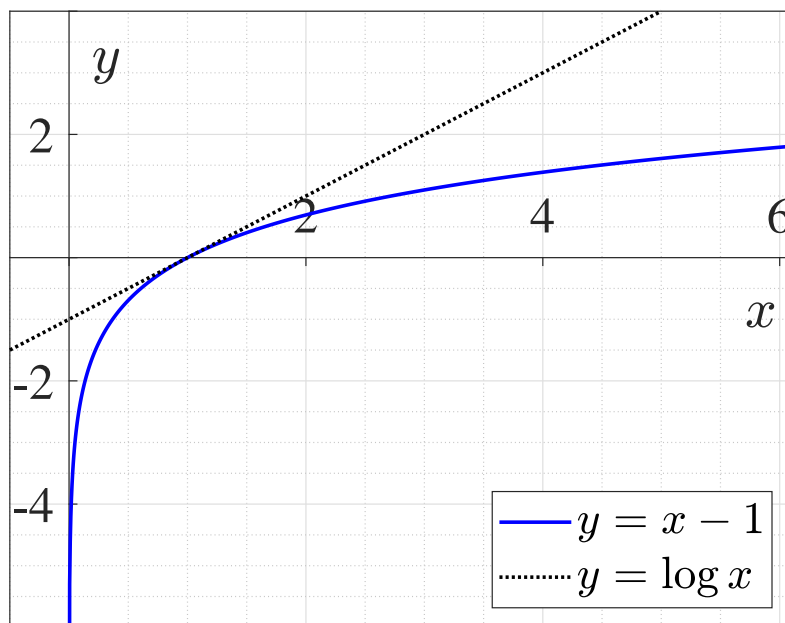
指数関数・対数関数と極限 (1/3)

- $f(x) = e^x$ とおくと, $f'(x) = e^x$ でしたので $f'(0) = 1$.
- つまり, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.
- 最後の等式より, h が 0 に十分に近いとき
$$e^h \simeq 1 + h$$
と近似できます.



指数関数・対数関数と極限 (2/3)

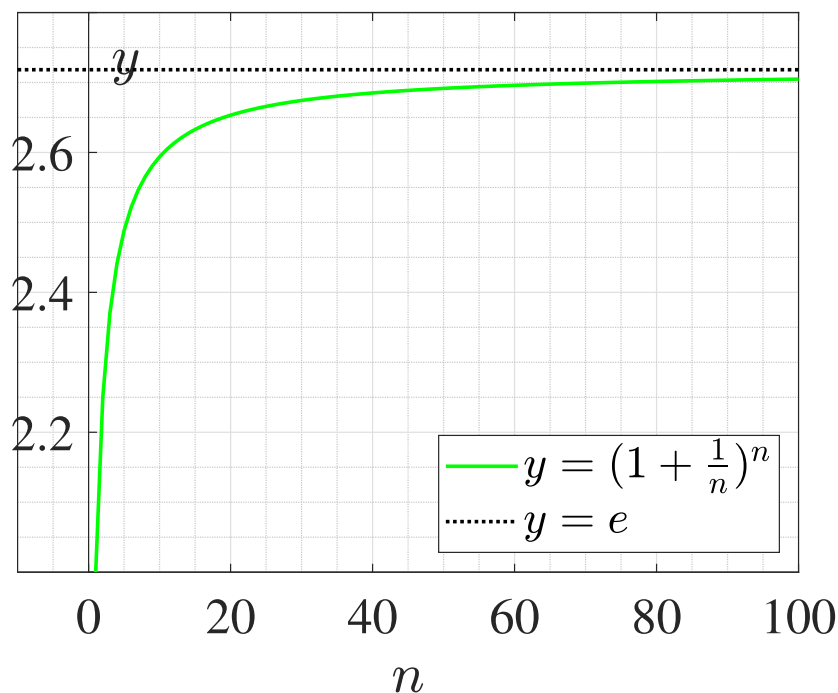
- $g(x) = \log x$ (e^x の逆関数) とおくと, $g'(x) = \frac{1}{x}$ でしたので $g'(1) = 1$.
- つまり, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$.
- 最後の等式より, h が 0 に十分に近いとき
 $\log(1+h) \simeq h$, つまり, $\log h \simeq h - 1$
と近似できます (これは, 前頁の近似と本質的には同じことです).



指数関数・対数関数と極限 (3/3)

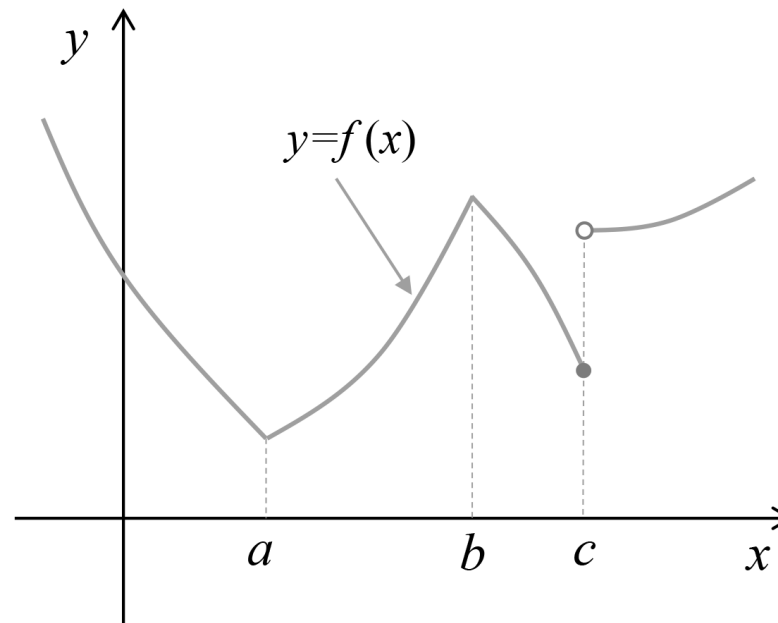
- 前頁の $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$ より,
$$\lim_{h \rightarrow 0} \log(1+h)^{\frac{1}{h}} = 1, \text{ つまり, } \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e.$$
- $h = \frac{1}{n}$ と置き直せば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

つまり, e の定義式 ($\Leftrightarrow$ § 4-1-2 のスライド 28) が得られました.



微分可能性 (1/2)

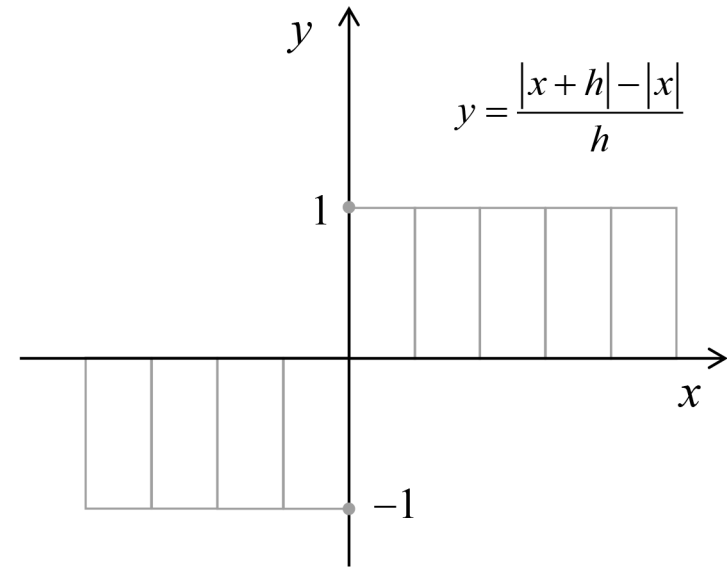
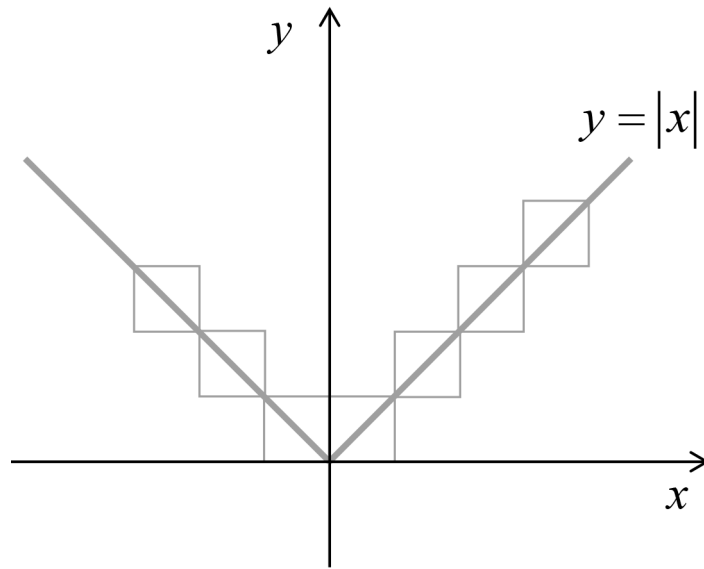
- これまでは触れずにきましたが、関数は（連続であっても）微分係数が存在するとは限りません.
- おおまかに言って、グラフに「尖った点」があるとその点での微分係数は存在しません（定義できません）.
- 例：



- 点 $x = a$ および $x = b$ では f の微分係数は存在しません.
- 点 $x = c$ では、 f は連続でないので、微分係数も存在しません.

微分可能性 (2/2)

- 具体例として, $f(x) = |x|$ の場合 :



- $x > 0$ のとき $f'(x) = 1$,
 - $x < 0$ のとき $f'(x) = -1$ ですが,
 - 点 $x = 0$ では f の微分係数は存在しません.
-
- 点 $x = a$ において関数 f の微分係数が存在するとき, f は $x = a$ で微分可能といいます.

微分は 何の役に立つでしょうか：関数の近似

- 点 $x = a$ における関数 f の微分係数は

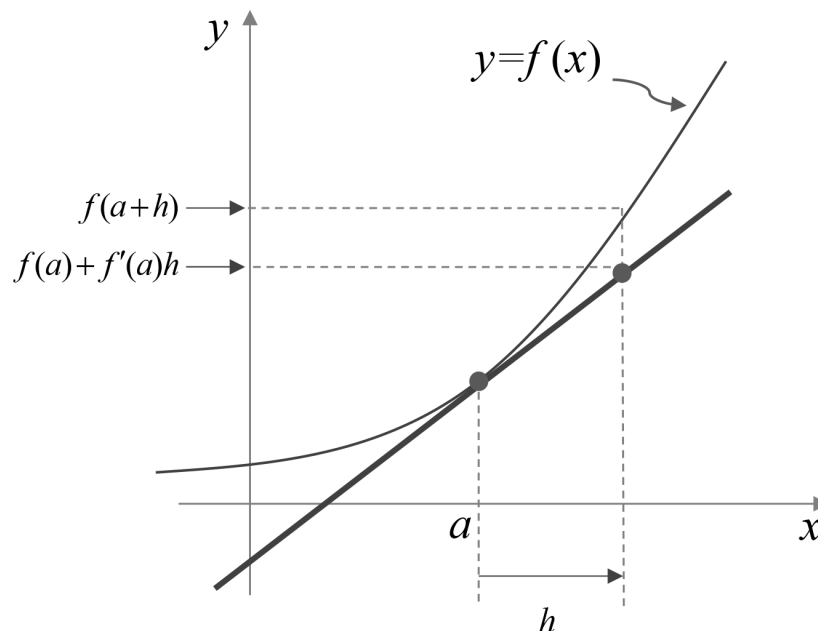
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

でした.

- つまり, h が 0 に十分に近いとき, 点 a から少し移動した点 $a+h$ での関数 f の値は

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$$

と近似できます (右辺は h に関する 1 次式で, そのグラフは $y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線です).



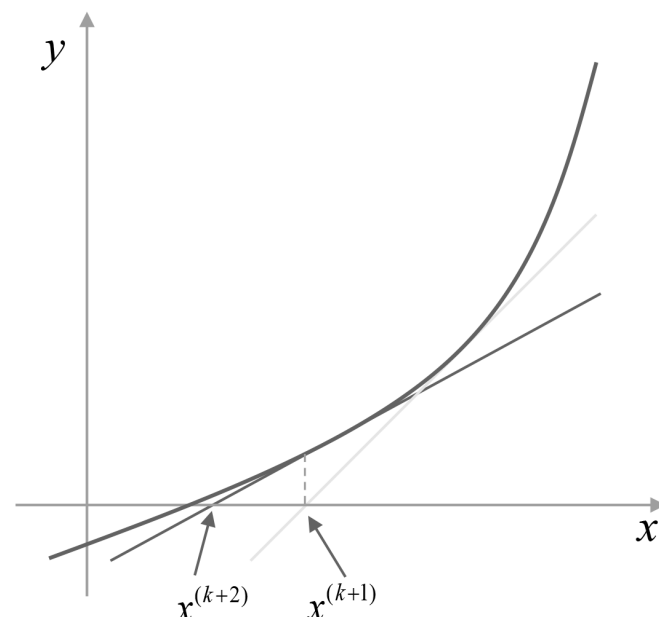
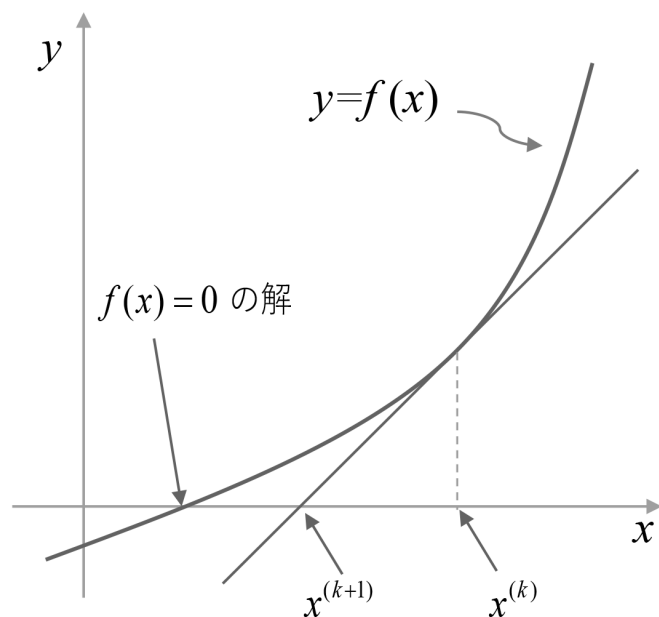
微分は 何の役に立つでしょうか：ニュートン・ラフソン法

- 方程式 $f(x) = 0$ を解くことを考えます.
- いま $x^{(k)}$ が得られているとして, $x^{(k)} + \Delta x$ が方程式を満たすようにしたいと考えます. 関数 $f(x^{(k)} + \Delta x)$ の近似を用いると
$$f(x^{(k)} + \Delta x) \simeq f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)}) \Delta x = 0.$$

- そこで, 初期点 $x^{(0)}$ を適当に決めて, 更新

$$x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

を繰り返すことで方程式を解くことができます.



原始関数と不定積分：導入

- 数学では、よく、「対になる関係」を考えます。
 - 逆数：掛け合わせると 1 になるもの。
 - 3 の逆数は $\frac{1}{3}$.
 - $\frac{a}{b}$ の逆数は $\frac{b}{a}$.
 - 逆関数： $y = f(x)$ に対して $x = f^{-1}(y)$.
 - $y = 2x + 3$ の逆関数は $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$.
 - $y = e^x$ の逆関数は $x = \log y$.
- 以下では、微分（つまり、関数 f から導関数 f' への変換）の逆の変換を考えます。
 - 例：微分すると $2x + 3$ になる関数は、たとえば $x^2 + 3x$.

原始関数と不定積分

- 関数 f に対して, $F'(x) = f(x)$ を満たす関数 F を, f の原始関数とよびます.
 - f の原始関数はたくさん (無数に) あります.
 - 例: $f(x) = 2x + 3$ に対して, たとえば $x^2 + 3x + 1$ も $x^2 + 3x - 4$ も原始関数です.
- f の原始関数すべてを $\int f(x) dx$ で表し, f の不定積分とよびます.
 - f の原始関数のひとつ F と定数 c を用いると,
$$\int f(x) dx = F(x) + c$$
と表せます (この c は積分定数とよばれます).

不定積分の諸公式

- 不定積分の線形性：

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx ,$

- α を実数として, $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx .$

- 基本的な関数の不定積分

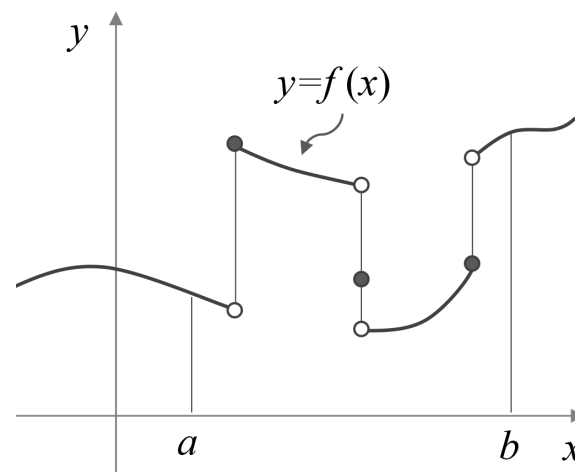
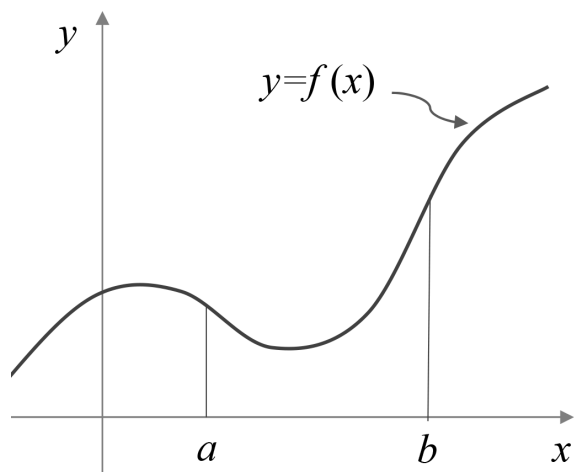
- -1 以外の実数 n に対して, $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c .$

- $\int e^x dx = e^x + c .$

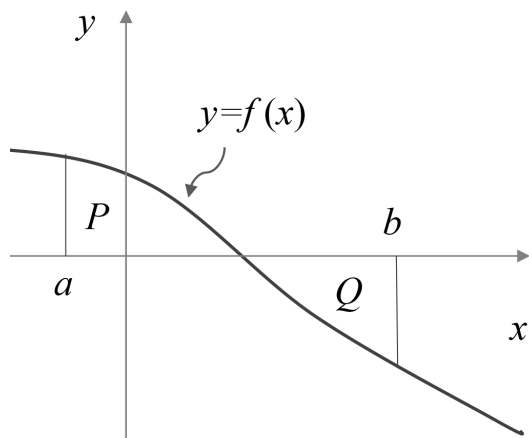
- $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c .$

定積分

- 関数 f と区間 $[a, b]$ に対して、図で囲んだ範囲の面積のことを、 a から b までの f の定積分とよび $\int_a^b f(x) dx$ で表します.



- ただし、グラフが x 軸より下にある部分については、負とします（符号付きの面積とよびます）.



この場合,

$$\int_a^b f(x) dx = (P \text{ の面積}) - (Q \text{ の面積}).$$

定積分は 不定積分を使って計算可能

- 関数 f の原始関数を F (つまり, $F'(x) = f(x)$) とすると,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

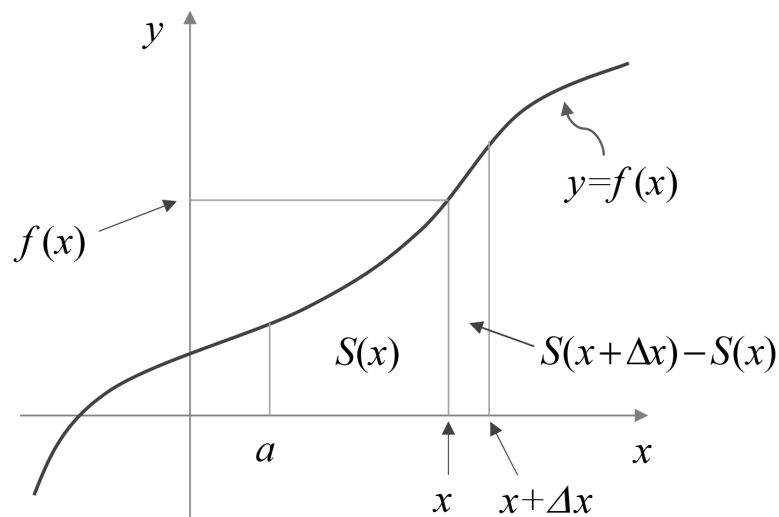
が成り立ちます (微分積分法の基本定理).

- $S(x)$ を図の a から x までの囲まれた部分の面積とすると,
 $S(x + \Delta x) - S(x) \simeq f(x) \Delta x$ が成り立ちます. $\Delta x \rightarrow 0$ とすると

$$S'(x) = \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x) \text{ が得られ, これを不定積分すると}$$

$S(x) = F(x) + c$ です. $S(a) = 0$ より $c = -F(a)$ であるので,

$$\int_a^b f(x) dx = S(b) = F(b) + c = F(b) - F(a) \text{ が得られます.}$$



定積分の計算の例 (1/2)

- $F'(x) = f(x)$ のとき, $f(x)$ の a から b までの定積分は

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \text{ この右辺を } [F(x)]_a^b \text{ と表します.}$$

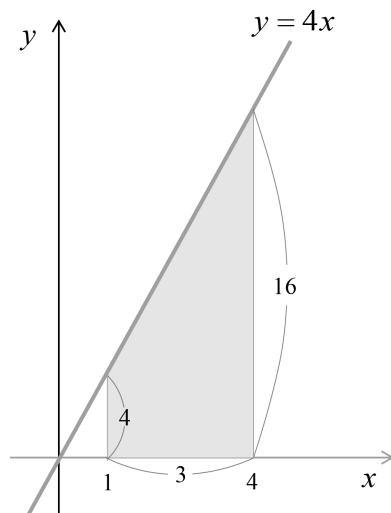
- 具体例 :

- $f(x) = 4x$ を $a = 1$ から $b = 4$ まで定積分します.

f の原始関数は $F(x) = 2x^2 + c$ なので,

$$\int_1^4 4x dx = [2x^2 + c]_1^4 = (2 \cdot 4^2 + c) - (2 \cdot 1^2 + c) = 30.$$

- 積分定数 c は相殺されるので, $c = 0$ としてよいことがわかります.



- 台形の面積の公式

$$\frac{(4 + 16) \cdot 3}{2} = 30$$

と, 結果が一致しています.

定積分の計算の例 (2/2)

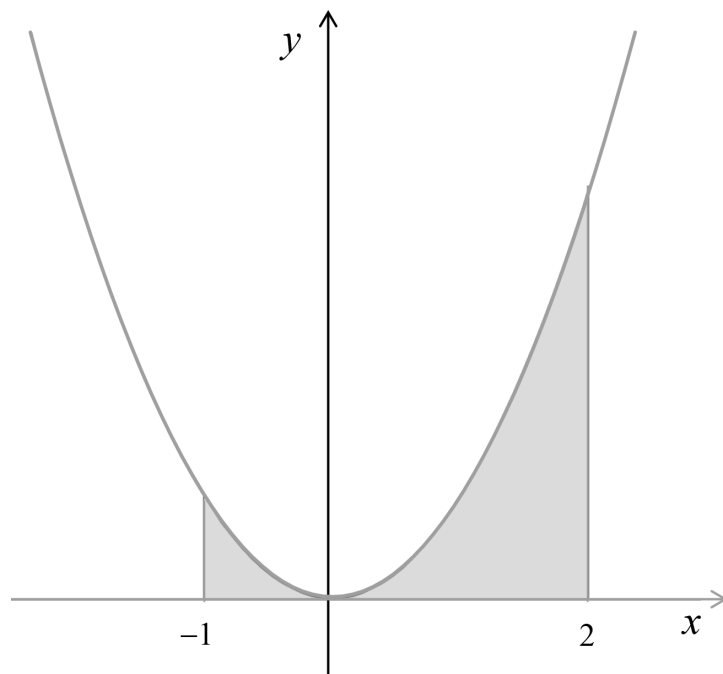
- $F'(x) = f(x)$ のとき, $f(x)$ の a から b までの定積分は

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \text{ この右辺を } [F(x)]_a^b \text{ と表します.}$$

- 具体例 :

- $f(x) = x^2$ を $a = -1$ から $b = 2$ まで定積分します.

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \right) = 3.$$



積分の応用：微分方程式の例 (1/3)

- バクテリアを培養すると、理想的には、一定の時間には一定の割合で増えます.

つまり、時刻 $x (\geq 0)$ におけるバクテリアの数を $z(x)$ で表すと、 $z(x)$ の増加率 $z'(x)$ はそのときの数 $z(x)$ に比例します：

$$z'(x) = az(x).$$

- a は正の定数です.
- 時刻 $x = 0$ でのバクテリアの数は c (正の定数) とします、つまり、 $z(0) = c$.
- ここで、

$$z(x) = ce^{ax}$$

が上の条件を満たすことは容易に確かめられます (実は、説明を省きますが、条件を満たす $z(x)$ はこれのみであることも示せます) .

積分の応用：微分方程式の例 (2/3)

- バクテリアの数 $z(x)$ の増加率はそのときの数 $z(x)$ に比例します：

$$z'(x) = az(x), \quad z(0) = c \quad (a \text{ は正の定数}).$$

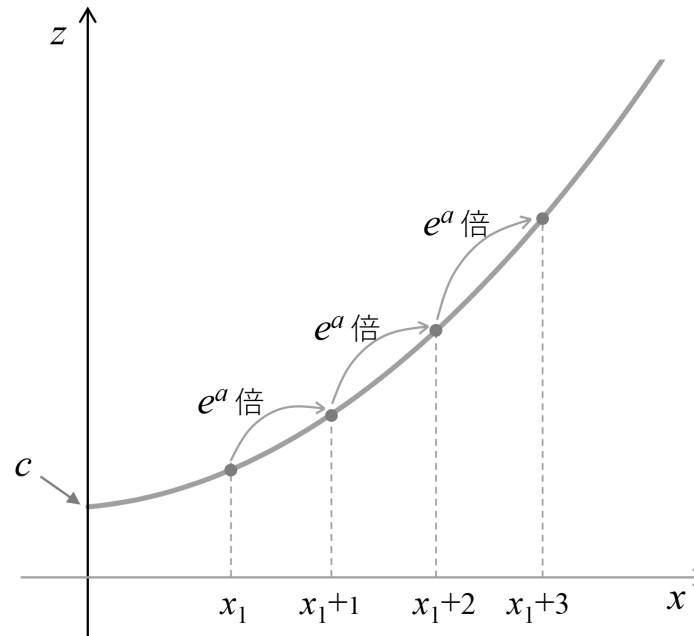
- この条件を満たす $z(x)$ は,

$$z(x) = ce^{ax}.$$

- ある時刻 x_1 と時刻 $x_1 + 1$ での量を比較すると,

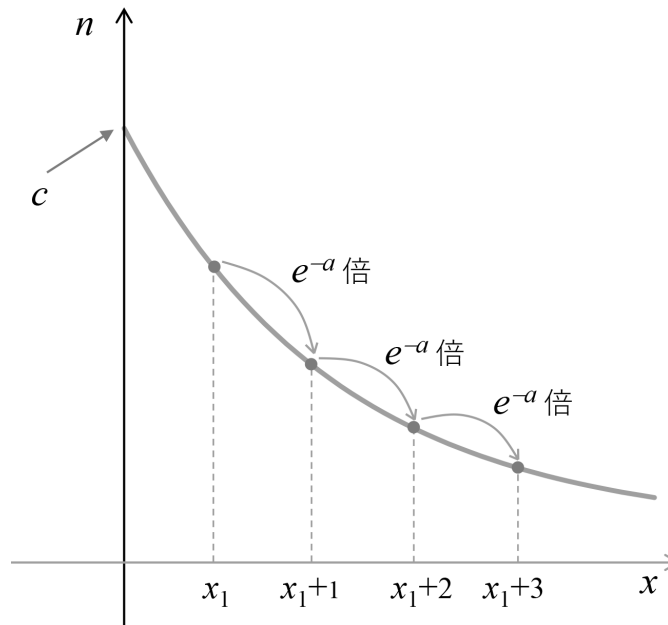
$$\frac{z(x_1 + 1)}{z(x_1)} = \frac{ce^{a(x_1+1)}}{ce^{ax_1}} = e^a \text{ (一定値)}.$$

つまり、一定時間ごとに一定の倍率で増えることがわかります。



積分の応用：微分方程式の例 (3/3)

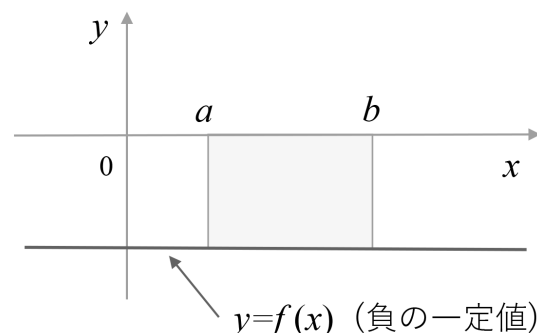
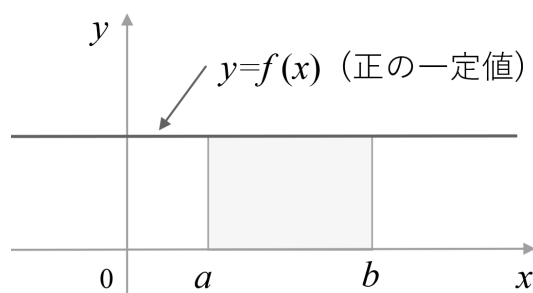
- 放射性元素は、一定時間には一定の割合で崩壊していきます。
つまり、時刻 x (≥ 0) における量（原子の数）を $n(x)$ で表すと、
$$n'(x) = -an(x), \quad n(0) = c, \quad a \text{ は正の定数.}$$
- $n(x)$ は時間とともに減少するので、その増加率 $n'(x)$ は負であることに注意しましょう.
- この条件を満たす $n(x)$ は、 $n(x) = ce^{-ax}$.



- ⇒ § 4-1-2 のスライド52も参照.

積分の応用：速度と変位

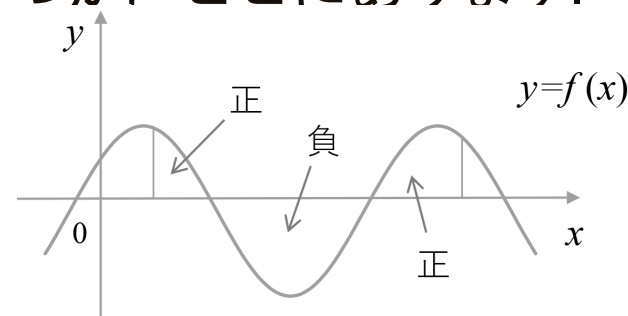
- 時刻 x における物体の速度を $f(x)$ で表します.
- もし $f(x)$ が正の一定値であれば, 「速度 $\times$ 時間 $= f(x)(b - a)$ 」は, 時刻 a から時刻 b までの間に物体が進んだ距離です.
- もし速度 $f(x)$ が負の一定値をとるときは, 後戻りすることになるので, 進んだ距離 $f(x)(b - a)$ は負の値です.



- ここで, 進んだ距離はともに $f(x)(b - a) = \int_a^b f(x) dx$ と表せます.

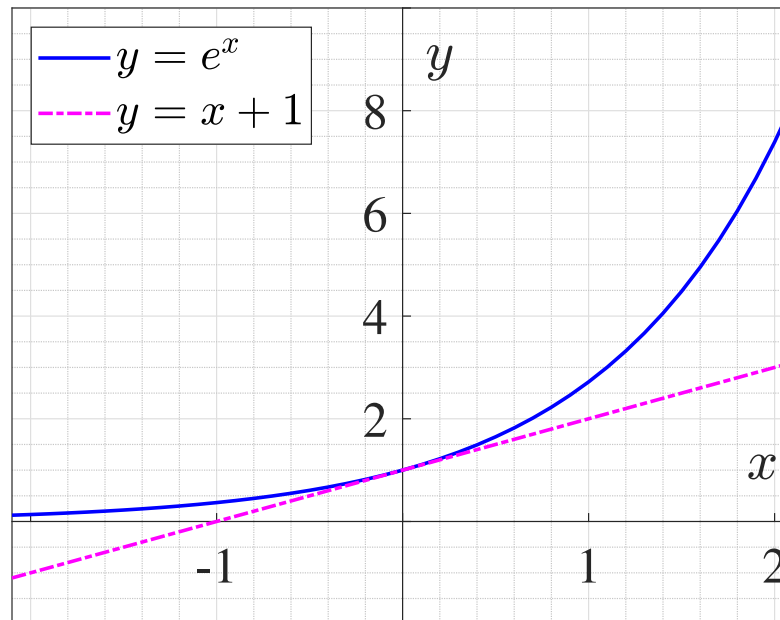
- 定積分を符号付きの面積で定義した理由の1つが, ここにあります.

- 速度 $f(x)$ が一定でない場合も, 進んだ距離は $\int_a^b f(x) dx$ で表されます.



積分の応用：指数関数の展開

- 指数関数 e^x は, x が 0 に十分に近いとき
$$e^x \simeq 1 + x$$
で近似できます (⇨ スライド 70) .



積分の応用：指数関数の展開

- 指数関数 e^x は、 x が 0 に十分に近いとき

$$e^x \simeq 1 + x$$

で近似できます (⇨ スライド 70) . 両辺の積分を考えると

$$\int_0^x e^x dx \simeq \int_0^x (1 + x) dx$$

ですが、これを計算すると

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 .$$

- この両辺をさらに 0 から x まで積分すれば

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 .$$

- この過程は何度も繰り返すことができ、

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^3 + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1}x^n .$$

- n が大きいほど、近似の精度が良いです (言い換えると、 x が 0 にさほど近くない場合でも近似が成り立ちます) .

積分の応用：確率論での応用

- 確率の計算

- $\Leftrightarrow$ § 4-1-4.

- 連続型の確率変数 X について、その確率密度関数を f とすると、 X が条件 $a \leq X \leq b$ を満たす確率は

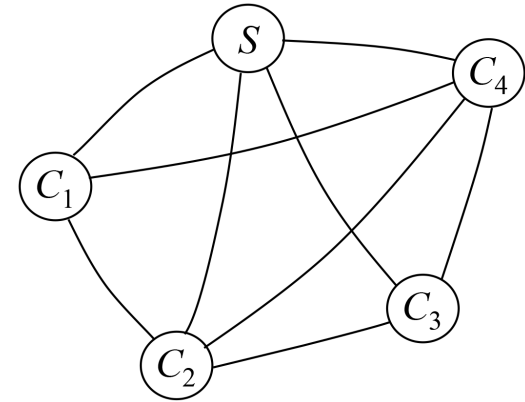
$$\int_a^b f(x) dx .$$

4-1-4 確率, 順列, 組み合わせ

順列：導入

- 例として，巡回セールスマン問題とよばれる問題を取りあげます。

- 都市 s から出発し，都市 $c_1, \dots, c_4$ のすべてをちょうど1回ずつ訪れてから s に戻る経路のうち，移動距離が最小のものを求めて下さい。



- 候補となる経路は，

$s \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow c_4 \rightarrow s$

$s \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_4 \rightarrow c_3 \rightarrow s$

$s \rightarrow c_1 \rightarrow c_3 \rightarrow c_2 \rightarrow c_4 \rightarrow s$

$s \rightarrow c_1 \rightarrow c_3 \rightarrow c_4 \rightarrow c_2 \rightarrow s$

$s \rightarrow c_1 \rightarrow c_4 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow s$

$s \rightarrow c_1 \rightarrow c_4 \rightarrow c_3 \rightarrow c_2 \rightarrow s$

$s \rightarrow c_2 \rightarrow \dots$

$\vdots$

- 最初を c_1 と決めたら，6 通り。
- 最初の決め方は 4 通り $\rightarrow$ 全部で $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ 通り。

順列とは

- いくつかのものを一列に並べるとき、その並べ方の1つ1つのことを、順列とよびます.
- 4個の都市の順列の総数は $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ 通り.
- n 個の（相異なるものの）順列の総数は $n!$ です.
 - $n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ のことを、 n の階乗とよびます.
 - $0! = 1$ と決めておく.
 - $n!$ は、 n が大きくなると急激に大きくなります.
- n 個から r 個を選んで並べる場合は、順列の総数は
$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+2) \cdot (n-r+1)}_{r \text{ 個の積}}.$$
 - この数のことを、 ${}_nP_r$ と書きます.
 - ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, ${}_nP_n = n!$ です.

(狭義の) 組合せとは

- n 個のものから r 個を選ぶときの、選び方の総数のことを、組合せとよび、 ${}_nC_r$ や $\binom{n}{r}$ で表します。

- 順列では順番を区別しますが、組合せでは順番を区別しません。

- 選んできた r 個の順列の総数は $r!$ です。

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

- ${}_nC_0 = 1$, ${}_nC_n = 1$.

- ${}_{n+1}C_r = {}_nC_{r-1} + {}_nC_r$. (再帰的な定義)

- $n+1$ 個目を選ぶ場合は、 n 個目までからはあと $r-1$ 個を選ぶので、 ${}_nC_{r-1}$.

- $n+1$ 個目を選ばない場合は、 n 個目までから r 個すべてを選ぶので、 ${}_nC_r$.

2 項定理

- 母関数

- 数列 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ に対して, 関数

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

のことを (x を変数とする) 母関数とよびます.

- 数列 ${}_nC_0, {}nC_1, {}nC_2, \dots, {}nC_n$ の母関数は $(1+x)^n$ です, つまり,

$$(1+x)^n = {}nC_0 + {}nC_1x + {}nC_2x^2 + \dots + {}nC_{n-1}x^{n-1} + {}nC_nx^n.$$

- これを一般化して,

$$(x+y)^n = {}nC_0y^n + {}nC_1xy^{n-1} + {}nC_2x^2y^{n-2} + \dots + {}nC_{n-1}x^ny + {}nC_nx^n.$$

- これを, 2 項定理とよびます. また, ${}_nC_r$ を 2 項係数とよびます.

- 例 :

- $(x+y)^6$ を展開したときの x^2y^4 の係数は, ${}_6C_2 = 15$.

- $(x-3y)^7$ を展開したときの x^4y^3 の係数は, ${}_7C_4 \cdot (-3)^3 = -945$.

2項定理の応用

- $\sum_{k=0}^n {}_nC_k = 2^n.$

- $\because 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k 1^k 1^{n-k}.$

(n 個それぞれについて, 選ぶか否かの 2 通りがある, と考えることもできます.)

- ${}_{m+n}C_r = \sum_{k=0}^r {}_mC_k {}_nC_{r-k}.$

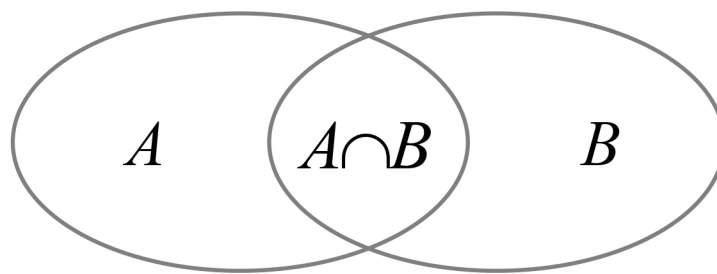
- $\because (1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n = \sum_{k=0}^m {}_mC_k x^k \sum_{l=0}^n {}_nC_l x^l$ において,
 x^r の係数を比較します.

(注) 記号 $\because$ は, 「なぜならば」 を意味します.

包除原理 = 包含と排除の原理

- 数え上げに用いられる, 集合の要素の数に関する原理です.
- S が有限集合のとき, S の要素の数を $|S|$ で表します.
- 有限集合 A, B に対して,

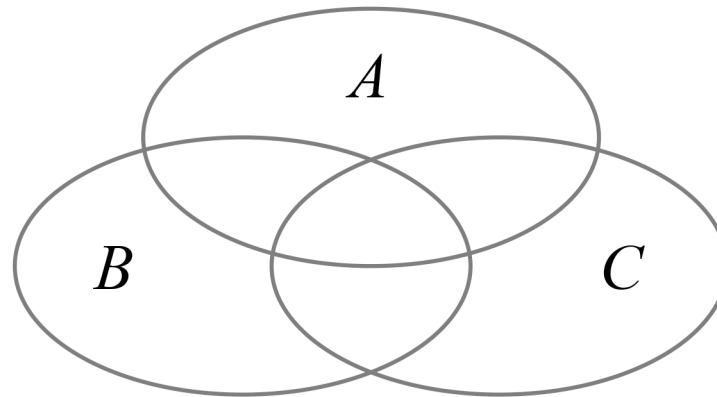
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



包除原理 = 包含と排除の原理

- 数え上げに用いられる, 集合の要素の数に関する原理です.
- S が有限集合のとき, S の要素の数を $|S|$ で表します.
- 有限集合 A, B, C に対して,

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = & |A| + |B| + |C| \\ & - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| \\ & + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$



包除原理の応用

- オイラー関数：自然数 n に対して、 n と互いに素である 1 以上 n 以下の自然数の個数を $\varphi(n)$ で表します.
 - 例： $\varphi(6) = 2$ (6 と互いに素なのは, $1, 5$) .
 $\varphi(7) = 6$ (7 と互いに素なのは, $1, \dots, 6$) .
 $\varphi(8) = 4$ (8 と互いに素なのは, $1, 3, 5, 7$) .
- $\varphi(504) = ?$
 - $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ なので, 504 以下で, 2 の倍数でも 3 の倍数でも 7 の倍数でもない自然数の個数を求めます.
 - A を 2 の倍数, B を 3 の倍数, C を 7 の倍数の集合とすると,
$$\phi(504) = 504 - |A \cup B \cup C|.$$
 - $|A| = 504/2 = 252$, $|B| = 504/3 = 168$, $|C| = 504/7 = 72$.
 - $|A \cap B| = 504/6 = 84$ (6 の倍数の数) ,
 $|B \cap C| = 504/21 = 24$, $|C \cap A| = 504/14 = 36$,
 $|A \cap B \cap C| = 504/42 = 12$ より, $\phi(504) = 504 - 360 = 144$.

組合せは どこに現れるでしょうか

- 回帰分析や判別分析での変数選択
 - n 個の説明変数のうちの r 個で目的変数を説明するとすると、選び方は ${}_nC_r$ 個あります.
- 文書要約
 - n 個の文からなる文書に対して、 r 個の文を選んで要約とする. 選び方は ${}_nC_r$ 個あります.
- $2n$ 個の点からなるデータに 2-クラスタリングを適用するとき、解の候補は ${}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_n$ 個あります.
- (注) 以上の例では、すべての組合せを試してみることは、実際にはしません.
- 2 項分布の確率関数 $P(\{X = k\}) = {}_n C_k p^k (1 - p)^{n-k}$.
⇒ スライド 126

確率論：導入

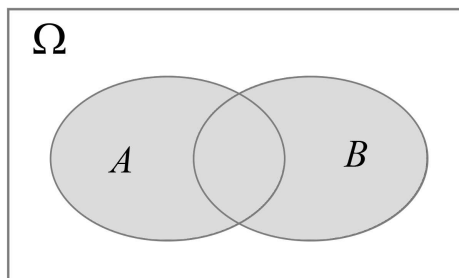
- 確率とは、ものごとが起きる「確からしさ」を 0 から 1 までの数で数値化したもの。偶然性・不規則性・予測不能性の程度の表現。
- 例：雨が降るかどうかの予測，疾患の生存率，地震の発生の予測，コインを投げたときに表と裏のどちらが出るかの予測。
- 先験的確率（組合せ確率）
 - 同等に起こりやすいと考えられる事柄は等しい確率をとる，として定めた確率。
- 経験的確率
 - 同じ実験や観測を繰り返して得たデータから定める確率。
- 公理的確率
 - 現代の数学では，確率の意味については議論せず，ある公理系（約束ごと）を満たすものを確率とよびます。

試行, 標本空間, 事象

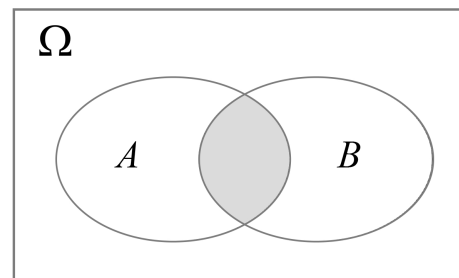
- 試行
 - 確率の考察の対象となる, 再現性のある実験や観察を行うこと.
 - 例: サイコロを振ること.
- 標本点 (または, 標本) ω
 - 個々の試行によって得られた結果のこと.
 - 例: サイコロの例で, 3 の目が出ること.
- 標本空間 Ω
 - 標本点すべての集合のこと.
 - 例: $\Omega = \{1 \text{ の目が出る}, \dots, 6 \text{ の目が出る} \}$.
- 事象 $A, B, C, \dots$
 - 標本空間の部分集合のこと.
 - 例: サイコロの例で, 偶数の目が出ること.

事象の演算 ($A, B, C \subseteq \Omega$ は事象)

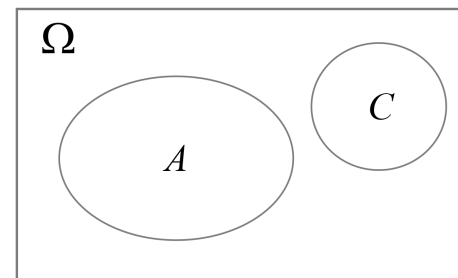
- A と B の和事象 $A \cup B$
 - A と B の少なくとも一方が起こること.
- A と B の積事象 $A \cap B$
 - A と B の両方が起こること.
- A と C が互いに排反であるとは, $A \cap C = \emptyset$ (空事象, つまり, 標本点を含まない事象) であること.
- A の余事象 A^c
 - A が起こらないという事象のこと.



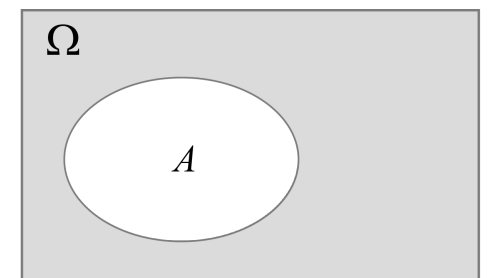
$A \cup B$



$A \cap B$



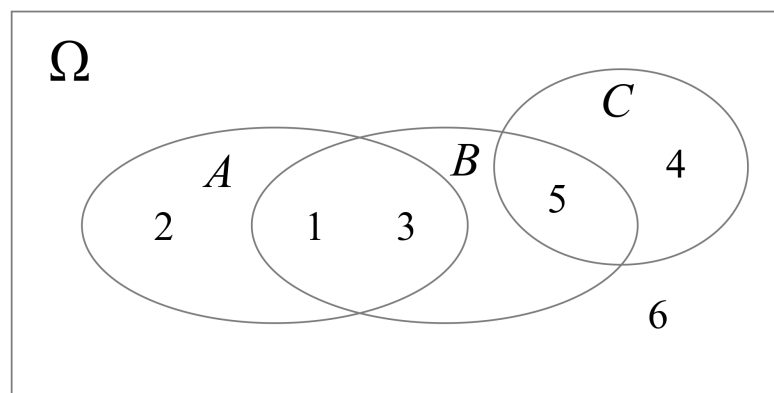
$A \cap C = \emptyset$



A^c

事象の演算の具体例

- サイコロを振って出る目を例として考えましょう.
- 標本空間は, $\Omega = \{1 \text{ の目が出る}, \dots, 6 \text{ の目が出る} \}$.
- 3 以下の目のいずれかが出る事象を A とし,
奇数の目のいずれかが出る事象を B とし,
4 か 5 のいずれかの目が出る事象を C とすると ...
- $A \cup B$ は, 1, 2, 3, 5 のいずれかの目が出る事象.
- $A \cap B$ は, 1 か 3 のいずれかの目が出る事象.
- A と C は互いに排反.
- A^c は, 4, 5, 6 のいずれかの目が出る事象.



確率の基本性質

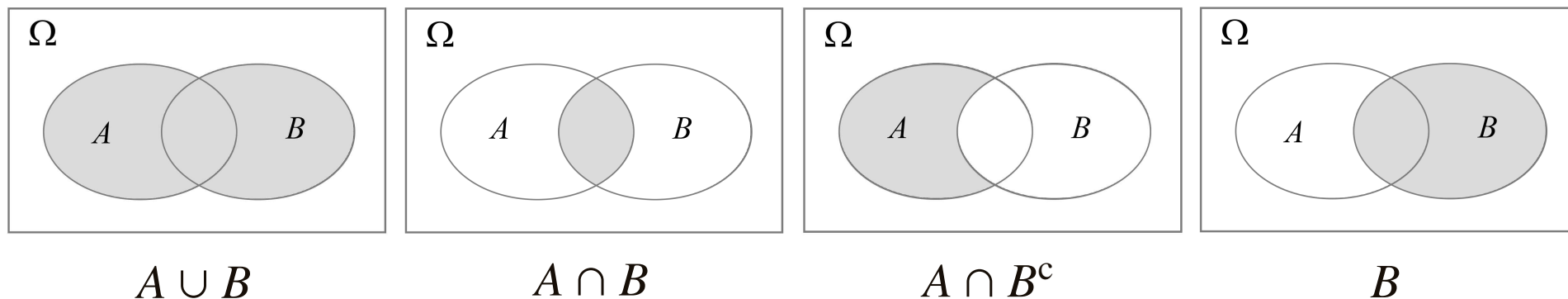
- 事象 A が起きる確率を, $P(A)$ で表します.
 - 任意の事象 A に対して, $0 \leq P(A) \leq 1$.
 - $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
 - 事象 A と事象 B が互いに排反 (つまり, $A \cap B = \emptyset$) ならば,
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- 以上の性質は, 約束ごとのように (確率の意味を議論することなく) 決めておきます.

確率の基本性質に関する具体例

- サイコロを振って出る目を例として考えます.
 - $\Omega = \{1 \text{ の目が出る}, \dots, 6 \text{ の目が出る} \}$.
 - それぞれの目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるとします.
 - 「1 の目が出ること」と「3 の目が出ること」が同時に起きることはありません（つまり、この2つの事象は排反です）ので、「1 または 3 の目が出る」確率は $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.
 - 「1 または 3 の目が出ること」と「5 の目が出ること」が同時に起きることはありませんので、「奇数の目が出る」確率は $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
 - 同様にして、「偶数の目が出る」確率も $\frac{1}{2}$.
 - 「奇数の目が出ること」と「偶数の目が出ること」が同時に起きることはありませんので、 $P(\Omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

加法定理

- 事象 A, B に対して, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- 証明 :
 - A は, $A \cap B$ と $A \cap B^c$ にわけられます (この2つは排反).
 - したがって, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$.
 - $A \cup B$ は, $A \cap B^c$ と B にわけられます (この2つは排反).
 - したがって, $P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B)$.
 - あとは, 2つの等式から $P(A \cap B^c)$ を消去すれば, 証明が完成します.



条件付き確率と乗法定理

- 事象 A が起こった場合に事象 B が起きるという確率を、条件付き確率とよび、 $P(B|A)$ で表します：

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} .$$

- 分母をはらった

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$$

の形（乗法定理）も、よく用いられます。

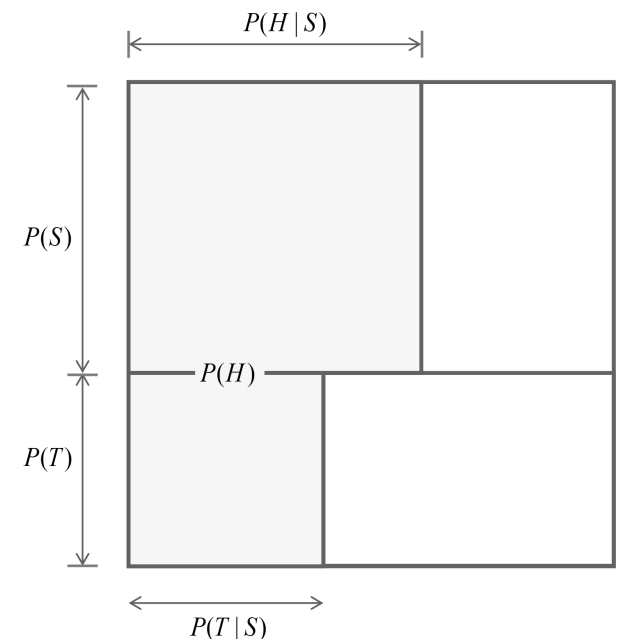
加法定理と乗法定理の具体例 (1/2)

- 10 円玉と 100 円玉を（別々に）投げたとき、表になる確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるとし、少なくとも一方が表になる確率は、次のようにして求められます。
- 10 円玉が表になる事象を A とし、
100 円玉が表になる事象を B とします。
 - 「10 円玉が表」の確率は、 $P(A) = \frac{1}{2}$ 。
 - 「10 円玉が表のときに 100 円玉が表」の確率は、 $P(B|A) = \frac{1}{2}$ 。
- 乗法定理より、「10 円玉も 100 円玉も表」の確率は、
$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$
- 加法定理より、「少なくとも一方が表」の確率は、
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

加法定理と乗法定理の具体例 (2/2)

- S 型と T 型のインフルエンザが流行しているとします.
- 患者が S 型である事象を S とし, T 型である事象を T とします. また, S 型と T 型の両方にかかっていることはないとします (つまり, S と T は互いに排反です). このとき, $P(S) = 0.6$, $P(T) = 0.4$ であるとします.
- S 型にかかった際に熱が 38°C を超える確率は 0.7 であり, T 型では 0.5 であるとします.
- インフルエンザにかかったときに熱が 38°C を超える事象を H で表すと, その確率 $P(H)$ は次のように求められます.

- $P(S) = 0.6$, $P(H|S) = 0.7$ と乗法定理より,
 $P(S \cap H) = P(S) P(H|S) = 0.42$.
- $P(T) = 0.4$, $P(H|T) = 0.5$ と乗法定理より,
 $P(T \cap H) = P(T) P(H|T) = 0.2$.
- $P(H) = P(S \cap H) + P(T \cap H) = 0.62$.



独立性

- 事象 A, B に対して条件

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

が成り立つとき, A と B は互いに独立であるといいます.

- 乗法定理 $P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$ より, A と B が互いに独立ならば

$$P(B|A) = P(B)$$

が成り立つことが分かります (つまり, B が起きる確率は, A が起きたかどうかの影響されません).

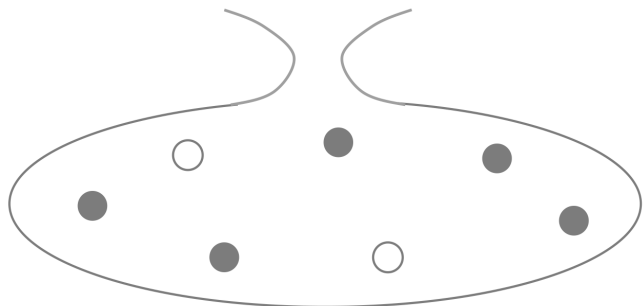
同様に,

$$P(A|B) = P(A)$$

も成り立ちます.

独立な事象の具体例

- 白い玉が2個と黒い玉が5個入った袋から、玉を取り出すことを考えましょう。どの玉も等しい確率で取り出されるとします。
- 玉を1つ取り出すと、袋に返してから、次の玉を取り出すことにします。
- A : 最初の玉が白である事象, B : 2番目の玉が黒である事象.
 - $P(A) = \frac{2}{7}$ (どの玉も、取り出される確率は $\frac{1}{7}$ だから) .
 - $P(B|A) = P(B) = \frac{5}{7}$
(最初の玉は返したので、最初に何が出ても次の試行に無関係) .
- 最初の玉が白で2番目の玉が黒である確率は,
$$P(A \cap B) = P(A) P(B) = \frac{10}{49} .$$



それでは，独立でない例は・・・

- 白い玉が2個と黒い玉が5個入った袋から，玉を取り出すことを考えましょう．どの玉も等しい確率で取り出されるとします．

- 玉を1つ取り出すと，袋に返さずに，次の玉を取り出すことにします．

- A ：最初の玉が白である事象， B ：2番目の玉が黒である事象．

- $P(A) = \frac{2}{7}$ （どの玉も，取り出される確率は $\frac{1}{7}$ だから）．

- $P(B|A) = \frac{5}{6}$ $\left(\neq P(B) = \frac{5}{7} \right)$
（最初の白玉は返さないなので，袋の中の玉の数は6）．

- 最初の玉が白で2番目の玉が黒である確率は，乗法定理より

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A) = \frac{10}{42} .$$

- 独立である場合（前頁）と結果が異なることに注意して下さい．

ベイズの定理

- 乗法定理より, $P(A \cap B)$ は

$$P(A) P(B|A) \quad \text{と} \quad P(B) P(A|B)$$

のいずれにも等しい. このことから,

$$P(B|A) = \frac{P(B) P(A|B)}{P(A)} .$$

- 一方, A は, $A \cap B$ と $A \cap B^c$ にわけられます (2 つは排反) .

$$\begin{aligned} \bullet \text{したがって, } P(A) &= \underbrace{P(A \cap B)}_{=P(B) P(A|B)} + \underbrace{P(A \cap B^c)}_{=P(B^c) P(A|B^c)} . \\ &= P(B) P(A|B) + P(B^c) P(A|B^c) \end{aligned}$$

- 以上より,

$$\overbrace{P(B|A)}^{\text{事後確率}} = \frac{\overbrace{P(B) P(A|B)}^{\text{事前確率}}}{P(B) P(A|B) + P(B^c) P(A|B^c)} . \quad (\text{ベイズの定理})$$

- B が原因となって A が生じたと考ええると, 事後確率 $P(B|A)$ は結果 A を知った上で B が起きていた確率.

ベイズの定理の具体例（加法定理と乗法定理の具体例 (2) の続き）

- S 型と T 型のインフルエンザが流行しているとします.
- 患者が S 型である事象を S とし, T 型である事象を T とします. また, S 型と T 型の両方にかかっていることはないとします (つまり, S と T は互いに排反です). このとき, $P(S) = 0.6$, $P(T) = 0.4$ であるとします.
- S 型にかかった際に熱が 38°C を超える確率は 0.7 であり, T 型では 0.5 であるとします.
- インフルエンザにかかったときに熱が 38°C を超える事象を H で表すと, $P(H) = P(S) P(H|S) + P(T) P(H|T) = 0.62$ でした.
- では, インフルエンザにかかって熱が 38°C を超えたとき, S 型であった確率は

$$P(S|H) = \frac{P(S) P(H|S)}{P(H)} = \frac{0.6 \cdot 0.7}{0.62} \simeq 0.677.$$

ベイズの定理の具体例

- ある電子メールがスパムメール（迷惑メール）であるという事象を B とおき、 $P(B) = 0.5$ とします（事前確率）.
- ある電子メールに「緊急」という単語が含まれるという事象を A とおきます.
 - スパムメールに「緊急」が含まれる確率を $P(A|B) = 0.75$,
スパムでないメールに「緊急」が含まれる確率を $P(A|B^c) = 0.15$ とします.
- では、メールが「緊急」を含んでいるときにそれがスパムメールである確率（事後確率）は、

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B) P(A|B)}{P(B) P(A|B) + P(B^c) P(A|B^c)} \\ &= \frac{0.5 \cdot 0.75}{0.5 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.15} \simeq 0.833. \end{aligned}$$

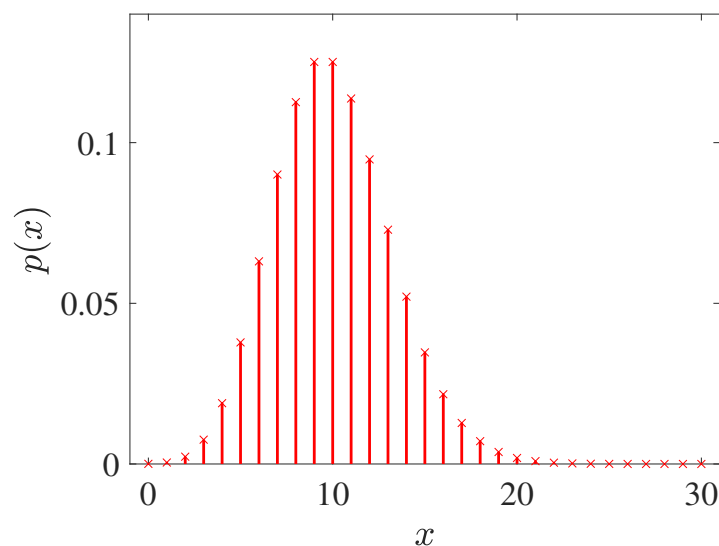
- ⇨ § 1-5 : データ解析と推論

確率変数

- 例として，コイン投げにおいて，表が出ると $X = 1$ とし裏が出ると $X = 0$ とします．このように，標本点それぞれに対応して値が割り当てられた変数 X のことを，確率変数とよびます．
- より詳しく言うと，標本空間 Ω の要素を $\omega_1, \omega_2, \dots$ のように列挙できる場合，各 $\omega_k \in \Omega$ に対してある数 x_k を $X(\omega_k) = x_k$ と割り当てます．この X を，（離散型の）確率変数とよびます．
- Ω の要素がとびとびに数えることができない場合（たとえば，時刻 x までにある機械が故障する事象を考えるような場合）は，取り扱いがより複雑になるので，まずはより簡単な離散型の場合を考えましょう．

確率分布

- $X(\omega)$ が値 x_k をとるといふ事象が起きる確率は, $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_k\})$ です. これを, 表記の簡単のため, $P(\{X = x_k\})$ と書くことにします.
- x_k と $P(\{X = x_k\})$ の組を, X の確率分布 (または, 分布) とよびます.
- $p(x) = P(\{X = x\})$ で定まる関数 p を, X の確率関数とよびます.



確率関数の例

確率関数と確率分布関数

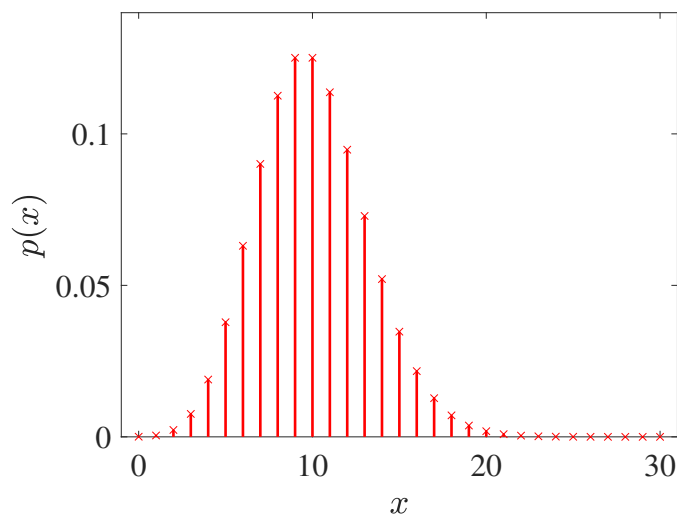
- 確率関数は, $p(x) = P(\{X = x\})$ でした.
- 確率変数 X がある値 x 以下である確率

$$F(x) = P(\{X \leq x\})$$

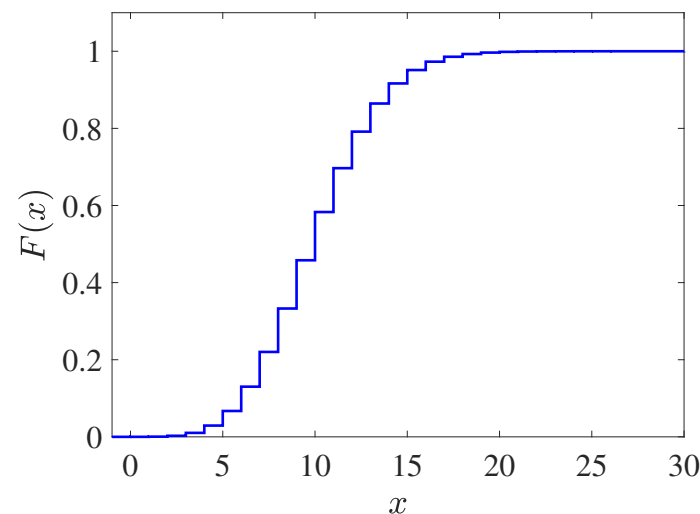
を, X の確率分布関数 (または, 分布関数, 累積分布関数) とよびます.

- $F(x)$ は, 0 から 1 までの値をとります. また, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

- F は, 単調増加関数です.



確率関数の例



対応する確率分布関数

期待値

- 期待値（または，平均）とは， (⇔ § 2-1)

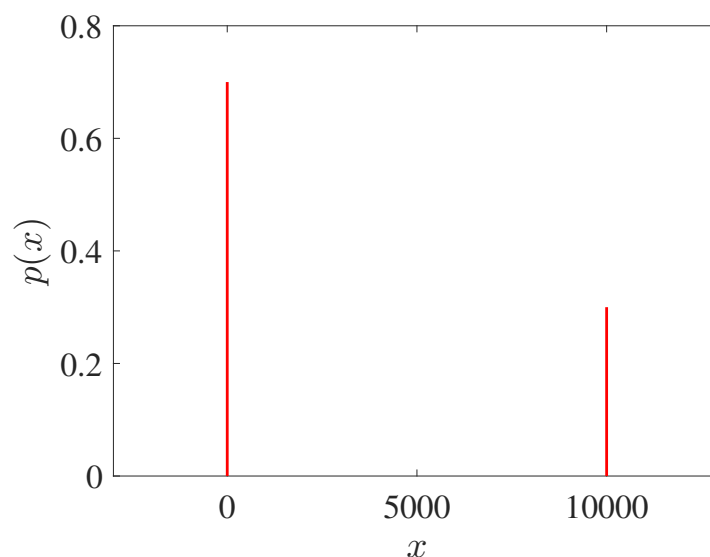
$$E[X] = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots .$$

(すべての標本点に関して和をとります)

- μ で表すことが多いです.
- 例： 0.3 の確率で 1 万円が当たるクジがあるとしましょう． つまり，
 $P(\{X = 1 \text{ 万円}\}) = 0.3$, $P(\{X = 0 \text{ 円}\}) = 0.7$.

当選金の期待値は，

$$E[X] = 1 \text{ 万円} \cdot 0.3 + 0 \text{ 円} \cdot 0.7 = 3 \text{ 千円} .$$



期待値

- 期待値（または，平均）とは， (⇔ § 2-1)

$$E[X] = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots .$$

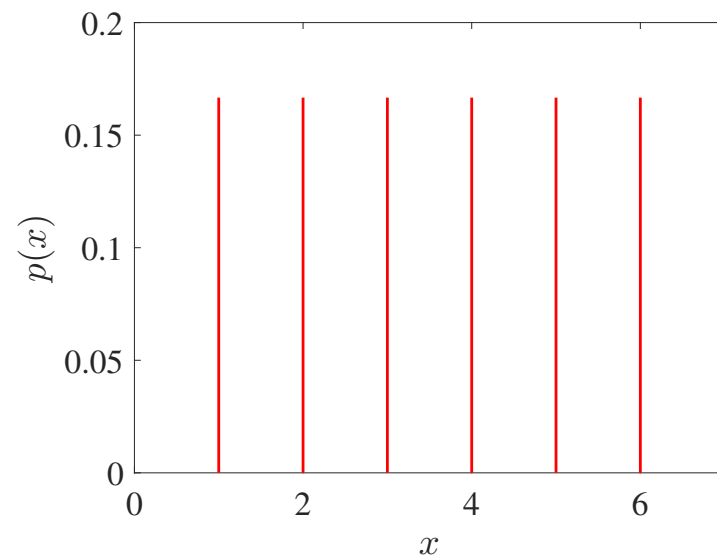
(すべての標本点に関して和をとります)

- μ で表すことが多いです.
- サイコロを振って出る目の数を X とおくと，

$$P(\{X = 1\}) = P(\{X = 2\}) = \cdots = P(\{X = 6\}) = \frac{1}{6} .$$

X の期待値は，

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5 .$$



分散

- 分散とは, $V[X] = E[(X - \mu)^2]$ (μ は X の期待値)
$$= (x_1 - \mu)^2 p(x_1) + (x_2 - \mu)^2 p(x_2) + \cdots .$$

(すべての標本点に関して和をとります)

- ばらつき具合の尺度. σ^2 で表すことが多いです.
- $\sqrt{\sigma^2}$ を, 標準偏差とよびます.
- 例. 0.3 の確率で 1 万円が当たるクジがあるとします :
$$P(\{X = 1 \text{ 万円}\}) = 0.3, \quad P(\{X = 0 \text{ 円}\}) = 0.7 .$$

当選金の期待値は,

$$E[X] = 1 \text{ 万円} \cdot 0.3 + 0 \text{ 円} \cdot 0.7 = 3 \text{ 千円} .$$

当選金の分散は,

$$V[X] = (1 \text{ 万円} - 3 \text{ 千円})^2 \cdot 0.3 + (0 \text{ 円} - 3 \text{ 千円})^2 \cdot 0.7 = 2100 \text{ 円}^2 .$$

期待値と分散に関する具体例

- 0.3 の確率で 1 万円が当たるクジ :

$$P(\{X = 1 \text{ 万円}\}) = 0.3, \quad P(\{X = 0 \text{ 円}\}) = 0.7.$$

- 0.003 の確率で 100 万円が当たるクジ :

$$P(\{Y = 100 \text{ 万円}\}) = 0.003, \quad P(\{Y = 0 \text{ 円}\}) = 0.997.$$

- X と Y では, 期待値は同じだが分散が異なります :

- $E[X] = 3 \text{ 千円}, \quad V[X] = 2100 \text{ 円}^2.$

- $E[Y] = 3 \text{ 千円}, \quad V[Y] = 299100 \text{ 円}^2.$

- 両方のクジを 1 枚ずつ買った場合, 当選金の合計の期待値は,

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 6 \text{ 千円}. \quad (\text{期待値の加法性})$$

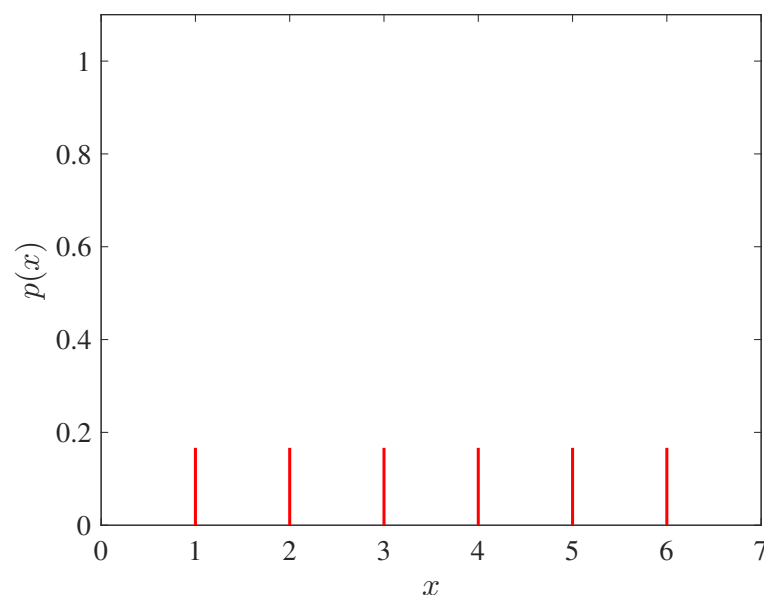
- X のクジを α 枚だけ買った場合, 当選金の合計の期待値と分散は,

$$E[\alpha X] = \alpha E[X],$$

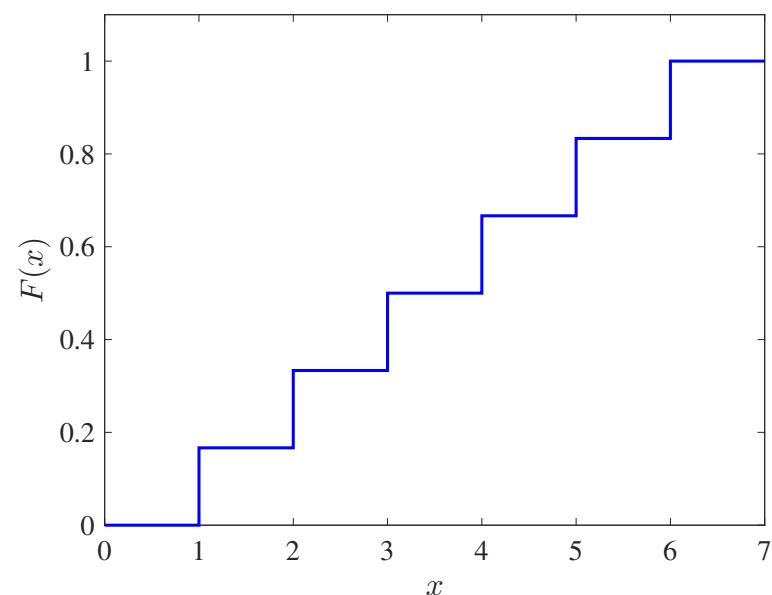
$$V[\alpha X] = \alpha^2 V[X].$$

さまざまな確率分布：離散型

- 離散一様分布 $DU(r)$ (r は自然数)
 - $1, 2, \dots, r$ の値をそれぞれ等確率 $1/r$ でとる確率分布です.
 - 例：サイコロを振ったときの目の確率分布は, $DU(6)$ です.



$DU(6)$ の確率関数



$DU(6)$ の確率分布関数

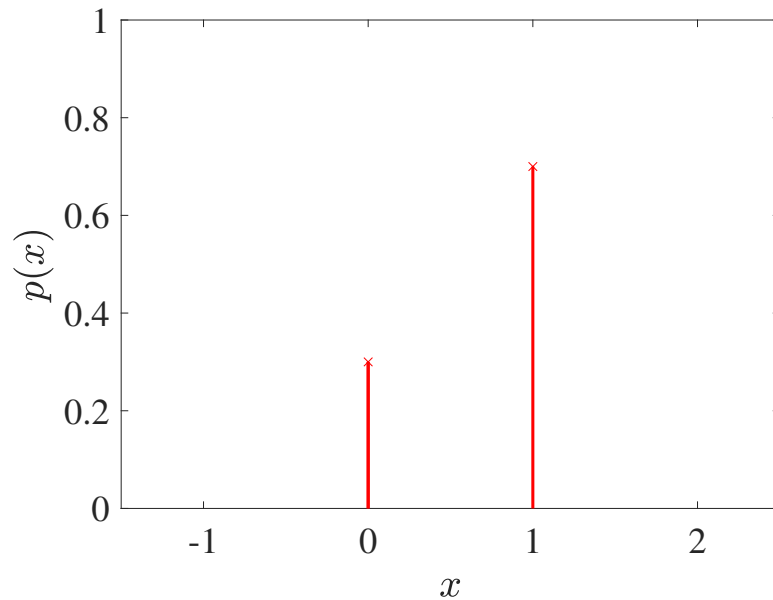
代表的な離散型の確率分布

- ベルヌーイ分布

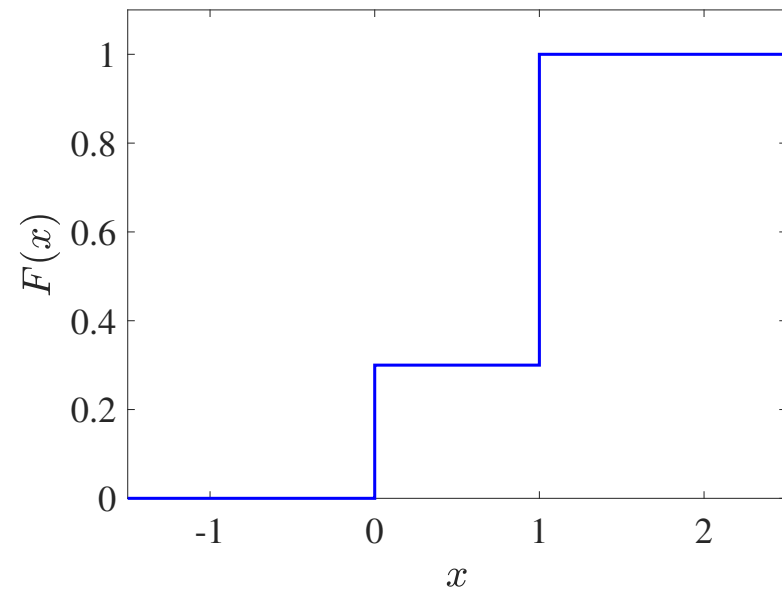
- 表の出る確率が p で裏の出る確率が $1 - p$ のコインを投げ、表が出ると $X = 1$ とし、裏が出ると $X = 0$ とした確率分布のことです.

- 確率関数は

$$P(\{X = 1\}) = p, \quad P(\{X = 0\}) = 1 - p.$$



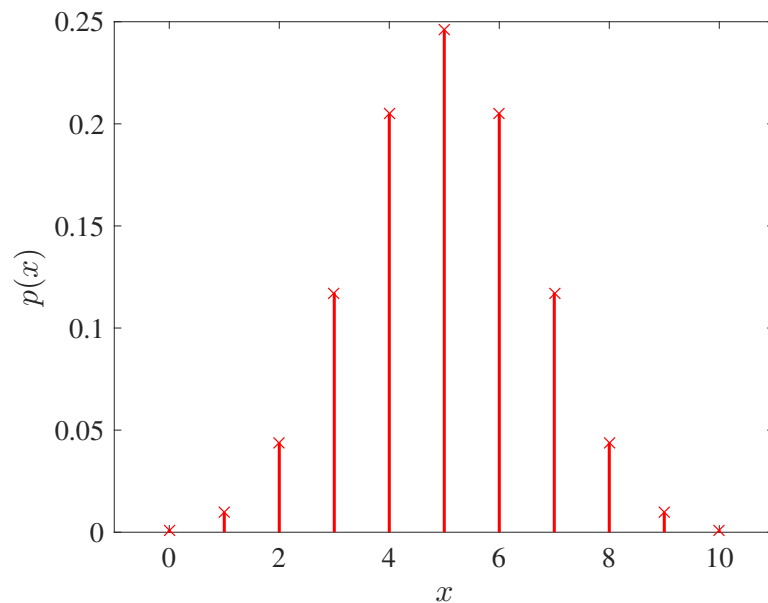
ベルヌーイ分布 ($p = 0.7$) の
確率関数



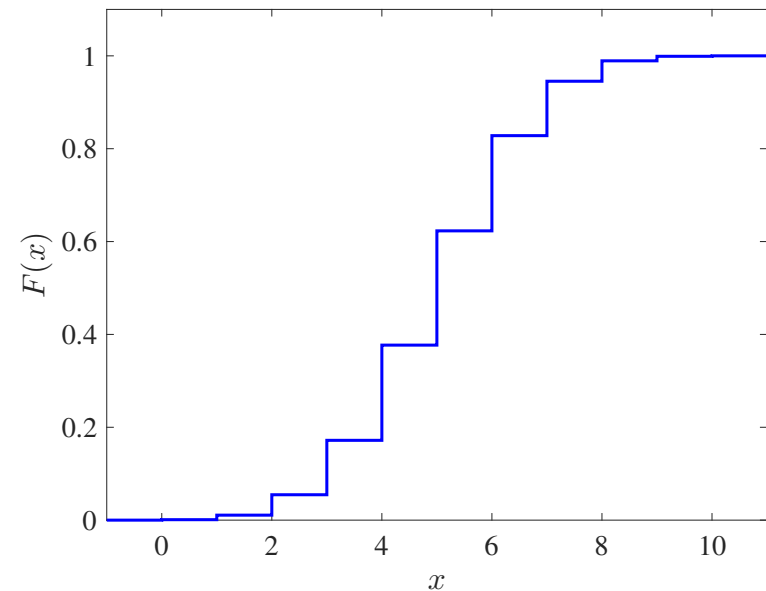
ベルヌーイ分布 ($p = 0.7$) の
確率分布関数

代表的な離散型の確率分布

- 2 項分布 $\text{BN}(n, p)$
 - ベルヌーイ分布で考えたコインを n 回投げたとき、表の出る回数 X の確率分布のことです（つまり、ベルヌーイ分布は $\text{BN}(1, p)$ です）。
 - 確率関数は $P(\{X = k\}) = {}_n C_k p^k (1 - p)^{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$)。



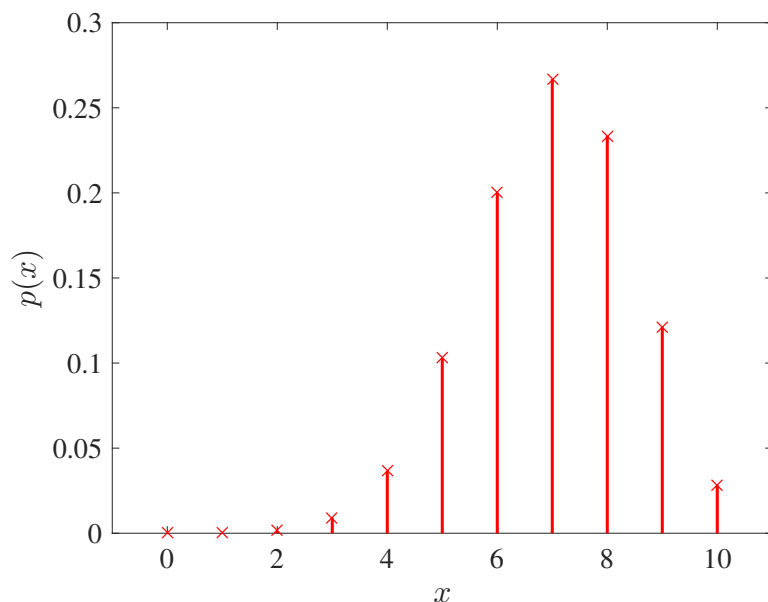
$\text{BN}(10, 0.5)$ の確率関数



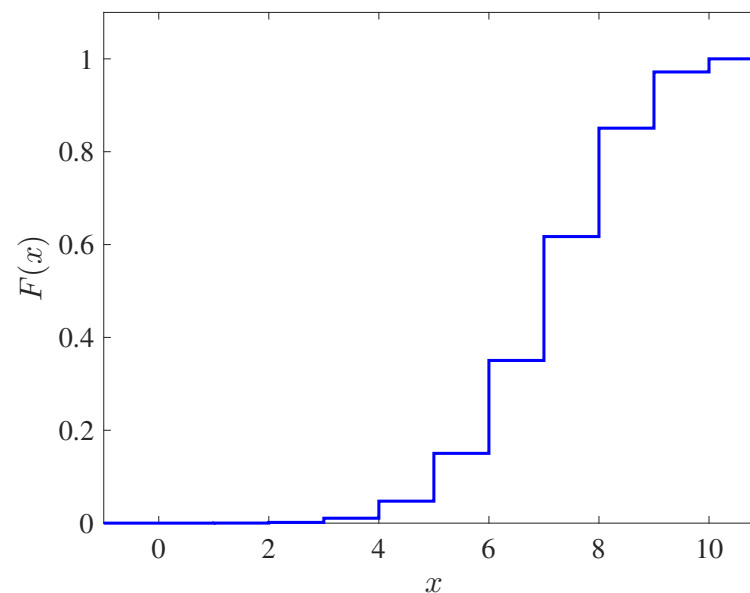
$\text{BN}(10, 0.5)$ の確率分布関数

代表的な離散型の確率分布

- 2 項分布 $\text{BN}(n, p)$
 - ベルヌーイ分布で考えたコインを n 回投げたとき、表の出る回数 X の確率分布のことです（つまり、ベルヌーイ分布は $\text{BN}(1, p)$ です）。
 - 確率関数は $P(\{X = k\}) = {}_nC_k p^k (1 - p)^{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$)。



$\text{BN}(10, 0.7)$ の確率関数



$\text{BN}(10, 0.7)$ の確率分布関数

代表的な離散型の確率分布

- ポアソン分布 $\text{PO}(\lambda)$

- 2項分布 $\text{BN}(n, p)$ で, $np = \lambda$ (一定値) としたまま, コインを投げる回数 n を非常に多くし表の出る確率 p を 0 に近づけていくと得られる分布です.

- 個々の生起確率は小さいけれど, 分析対象の数が多い現象は, ポアソン分布がよくあてはまることが知られています. たとえば,

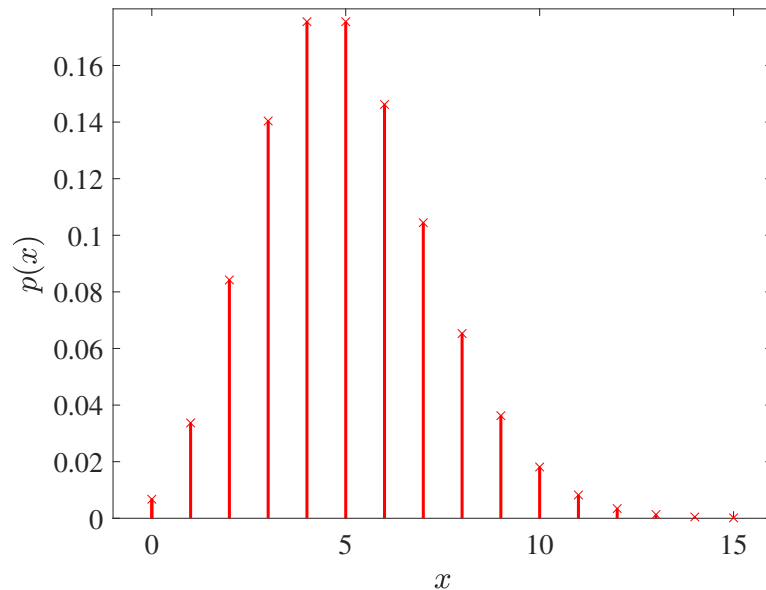
- 一定期間に製造された製品のうち, 不良品の個数,
- 一定期間内の事故の件数,
- 単位面積あたりの雨粒の数.

- 確率関数は $P(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$

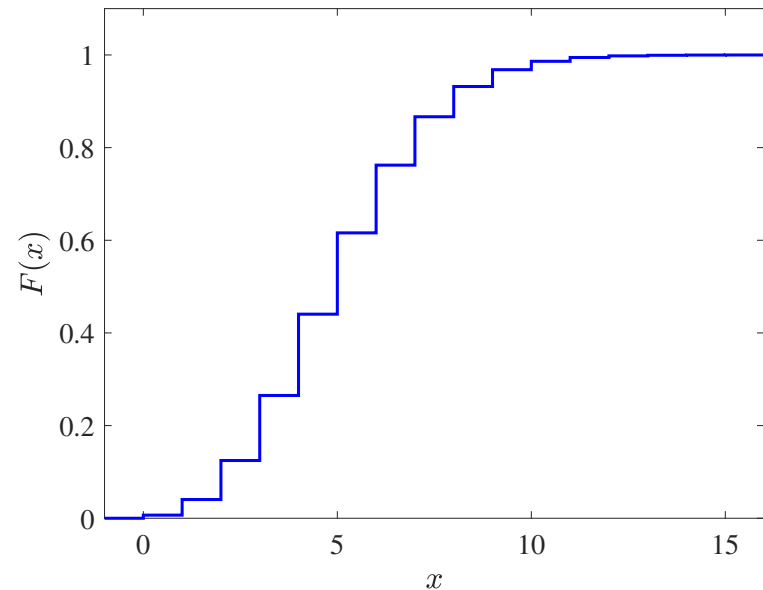
代表的な離散型の確率分布

- ポアソン分布 $\text{Po}(\lambda)$

- 確率関数は $P(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$.
- 期待値も分散も λ .



$\text{Po}(5)$ の確率密度関数

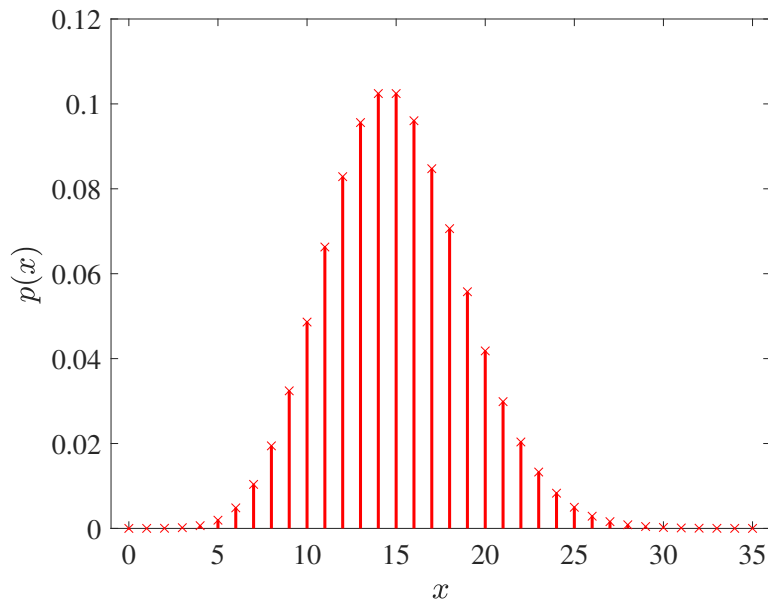


$\text{Po}(5)$ の確率分布関数

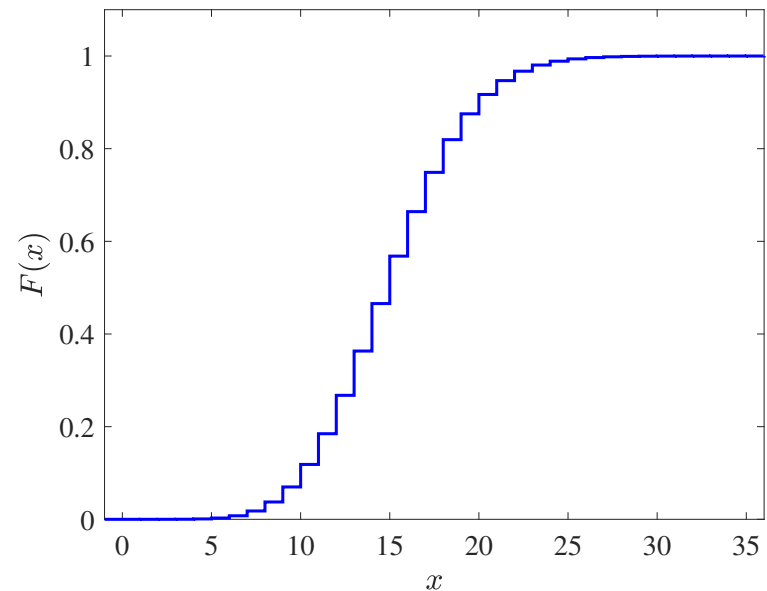
代表的な離散型の確率分布

- ポアソン分布 $\text{Po}(\lambda)$

- 確率関数は $P(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$.
- 期待値も分散も λ .



$\text{Po}(15)$ の確率密度関数

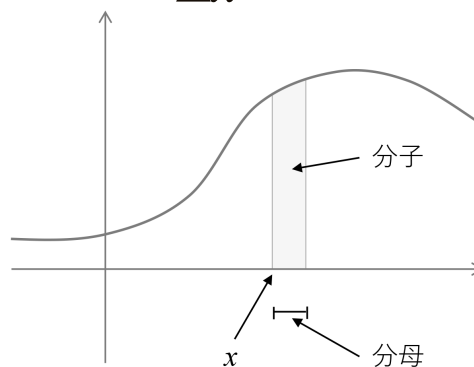


$\text{Po}(15)$ の確率分布関数

連続型の確率分布

- 確率変数 X が、長さや時間など、連続値をとる変数である場合を考えましょう.
- X がとり得る値は無限個あるので、 X がある 1 つの値 x をとる確率は $P(\{X = x\}) = 0$ ということになります.
- 一方、確率分布関数は、離散型の場合と同様に、 $F(x) = P(\{X \leq x\})$ で定義できます.
- 確率分布関数の導関数 $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ を、 X の確率密度関数とよびます.
- つまり、 x から $x + \Delta x$ までの小さい区間を考えて、 X がこの区間に入る確率を区間の幅で割った値を考えれば、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(\{x \leq X \leq x + \Delta x\})}{\Delta x} = f(x).$$



確率密度関数

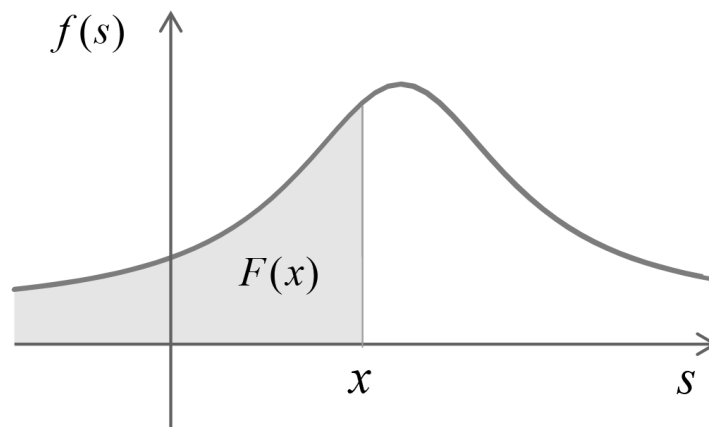
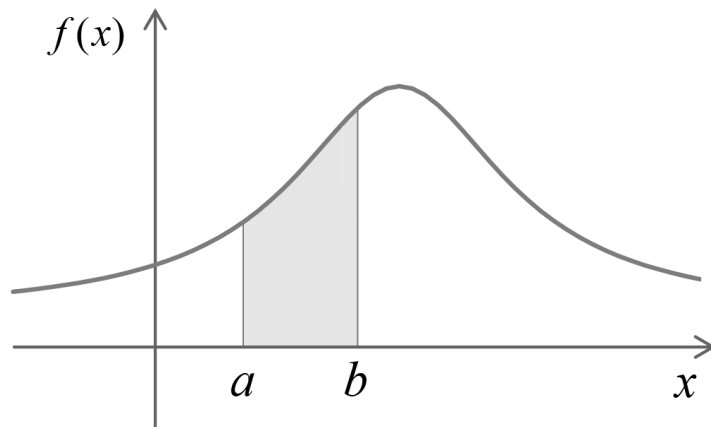
- 確率変数 X が a と b の間に入る確率は、確率密度関数 f を用いて

$$P(\{a \leq X \leq b\}) = \int_a^b f(x) dx$$

と計算できます（ただし、 a と b は定数で、 $a < b$ とします）。

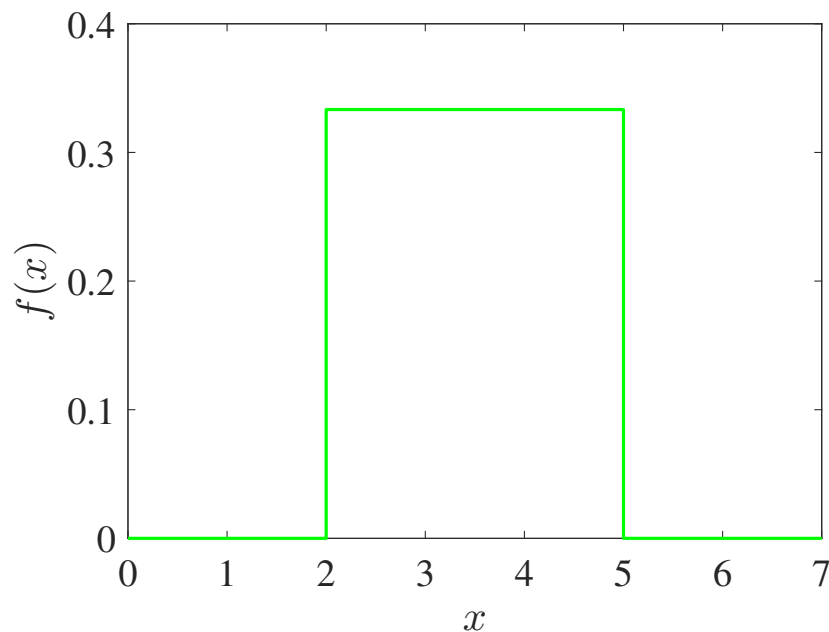
- 確率分布関数との関係は、

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds .$$



代表的な連続型の確率分布

- 一様分布 $U(a, b)$
 - a から b の間の区間（ただし, $a < b$ ）で等しい確率をとる確率分布です.



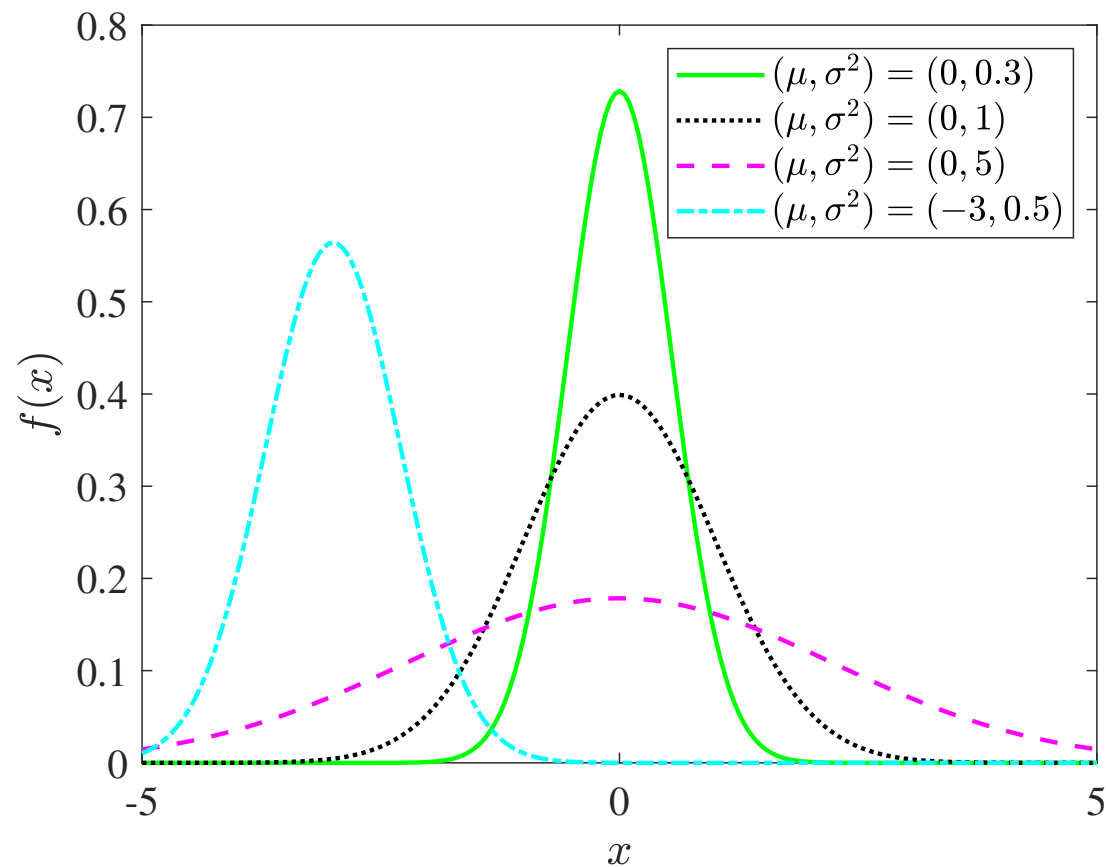
$U(2, 5)$ の確率密度関数

代表的な連続型の確率分布

- 正規分布（または，ガウス分布） $N(\mu, \sigma^2)$
 - 統計学で最もよく用いられる確率分布です.
 - 確率密度関数は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.
 - 期待値は μ で，分散は σ^2 .
 - $N(0, 1)$ を，標準正規分布とよびます.
 - X が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うならば， $\frac{X - \mu}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従います.

代表的な連続型の確率分布

- 正規分布（または，ガウス分布） $N(\mu, \sigma^2)$
- 確率密度関数の値 $f(x)$ は， $x = \mu$ で最大になります。
グラフは，左右対称で，単峰性をもちます。

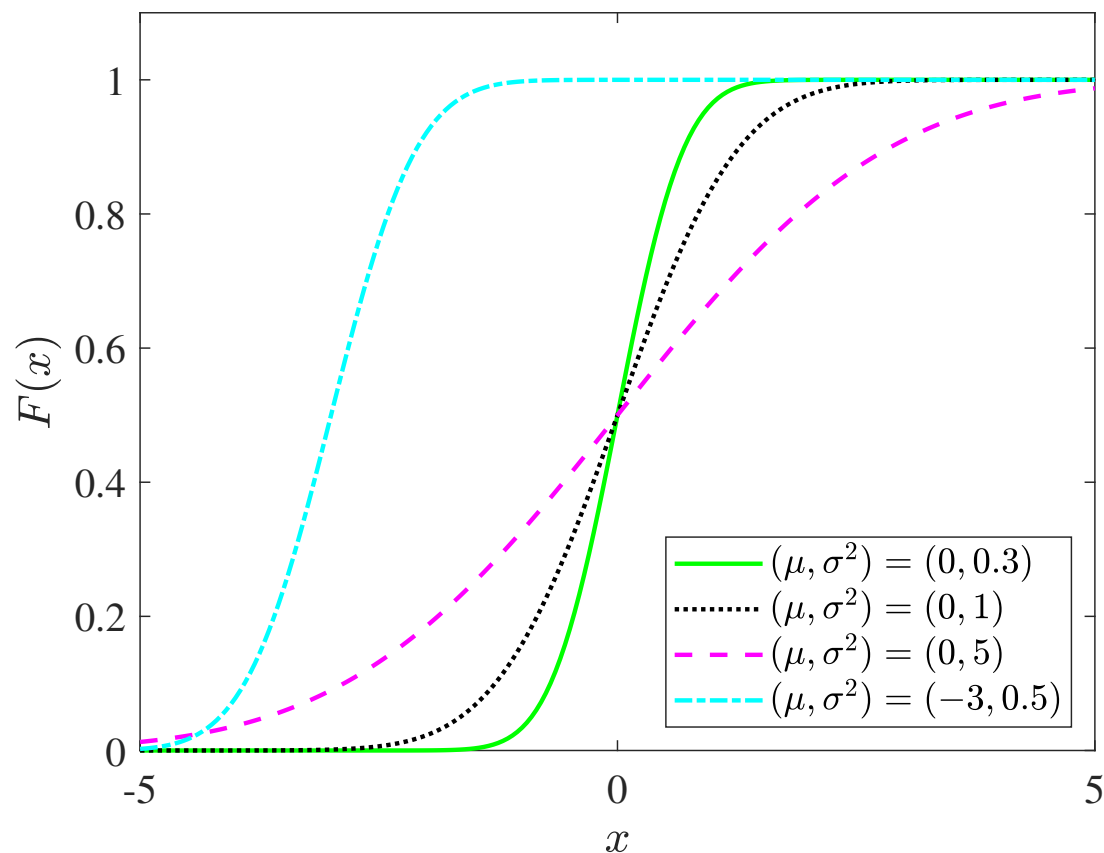


$N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数

代表的な連続型の確率分布

- 正規分布（または、ガウス分布） $N(\mu, \sigma^2)$

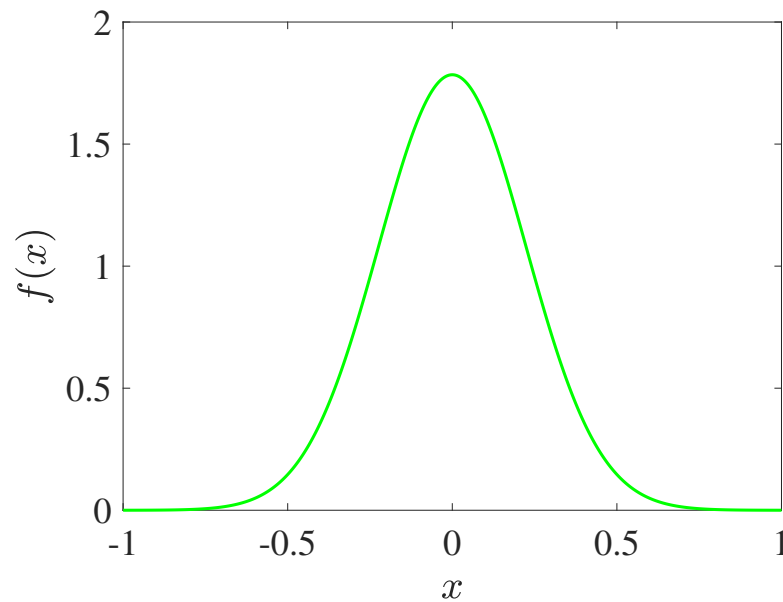
- 確率分布関数 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds$ のグラフ：



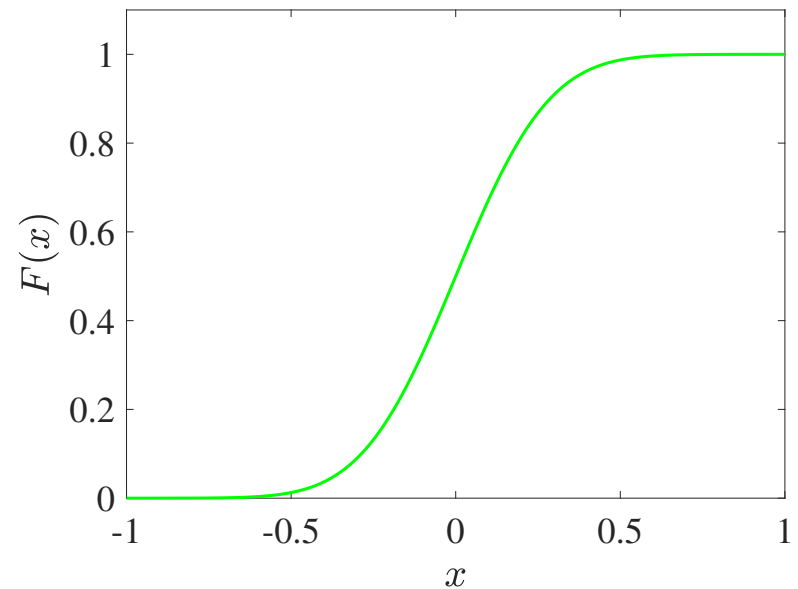
$N(\mu, \sigma^2)$ の確率分布関数

確率密度関数に関する注意

- 確率密度関数の値 $f(x)$ は, 「確率変数 X が値 x をとる確率」ではないことに注意して下さい.
- このため, 分散 σ^2 が小さい場合, $f(x) > 1$ となり得ます.
- あくまで, $\int_a^b f(x) dx$ や $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ が確率です.
- 確率分布関数の値 $F(x)$ は (確率 $P\{X \leq x\}$ を表すので), 必ず 1 以下です.



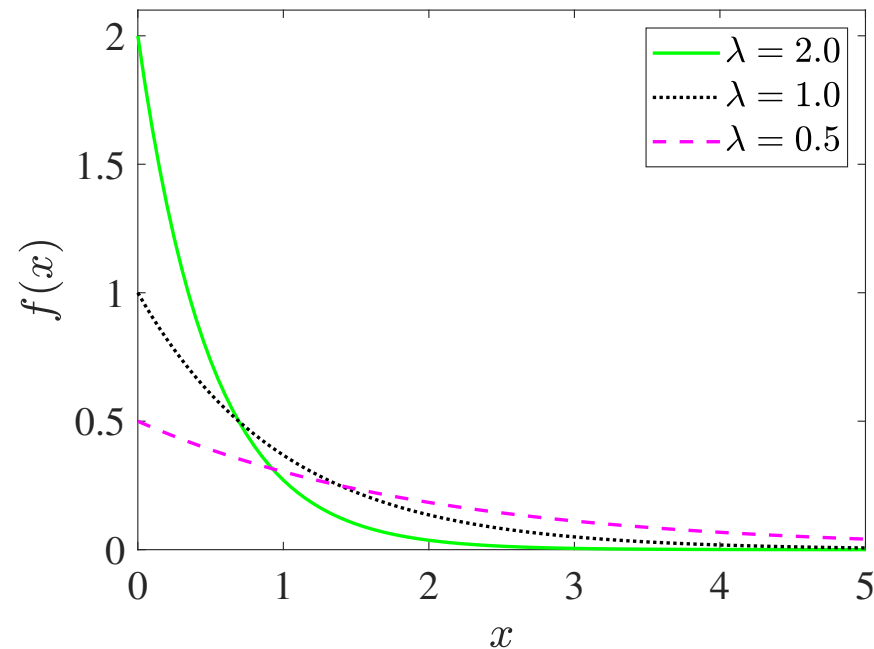
$N(0, 0.05)$ の確率密度関数



$N(0, 0.05)$ の確率分布関数

代表的な連続型の確率分布

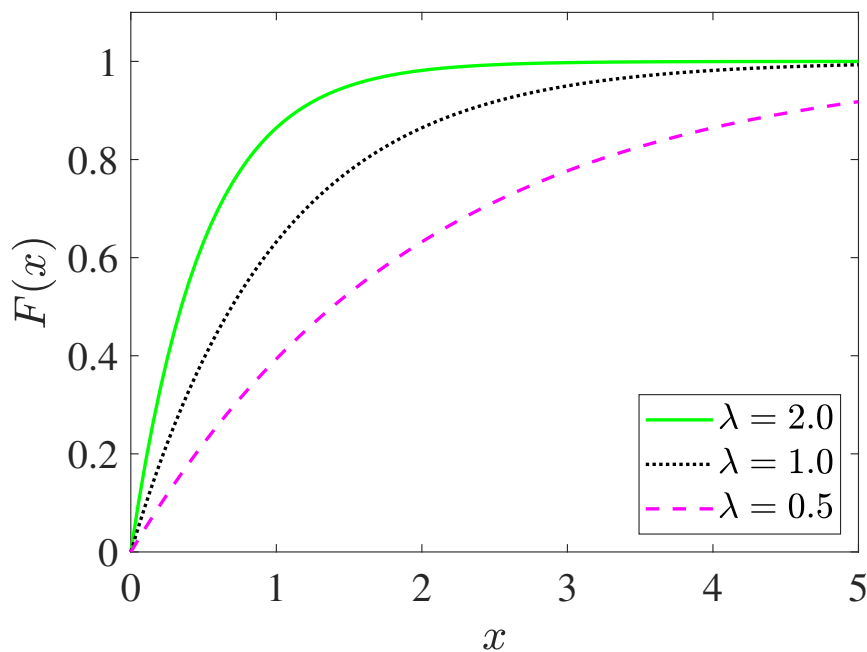
- 指数分布 $\text{Ex}(\lambda)$ ($\lambda > 0$)
 - 確率密度関数は $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$) .
 - $x = 0$ で, 最大値をとります.
 - $x < 0$ のときは, $f(x) = 0$.



$\text{Ex}(\lambda)$ の確率密度関数

代表的な連続型の確率分布

- 指数分布 $\text{Ex}(\lambda)$ ($\lambda > 0$)
 - ポアソン分布の別の見方とみなせる：
 - 単位時間あたりの現象の発生回数がポアソン分布に従うのです。
 - 指数分布は現象が1回起きてから次に起きるまでの時間の確率分布です。



$\text{Ex}(\lambda)$ の確率分布関数

確率は どこで使われるでしょうか

- 統計学の基礎として, データ分析の実に多くの場面で用いられます.
 - 平均, 分散,... $\Rightarrow$ § 1-4, § 4-8 など
 - 回帰分析における尤度 $\Rightarrow$ § 4-7
 - 密度推定 (データが従う確率分布の推定) $\Rightarrow$ § 4-9

4-1-5 線形代数

ベクトルとは

- ベクトル

- いくつかの数を一列に配置したもの, つまり,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{や} \quad \begin{bmatrix} 3.3 \\ 4.8 \\ 10.6 \\ 7.25 \end{bmatrix}$$

などを, ベクトルとよびます.

- 並べた数字 (つまり, 1, 0, -1 など) のことを, そのベクトルの成分とよびます.

- 並べ方の順番には意味があります. つまり, たとえば $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とは, 異なるベクトルです.

- スカラー

- ベクトルに対して, (1 つ 1 つの) 実数のことをスカラーとよびます.

n 次元ベクトル

- n 次元ベクトル

- $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ のように, n 個の成分からなるベクトル $\mathbf{x}$ を n 次元ベクトルとよびます.

- ベクトルを表すには, このように太字のイタリック体 $\mathbf{x}$ のほか, $\vec{x}$ などが用いられます.

- $\mathbf{x}$ が $x_1, \dots, x_n$ を成分とするベクトルであることを, $\mathbf{x} = (x_i)$ と表記することもあります.

- 先頭から数えて i 番目の成分 x_i を, $\mathbf{x}$ の第 i 成分とよびます.

列ベクトルと行ベクトル

- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ のように，成分を縦に並べたベクトルを，列ベクトル（または，縦ベクトル）とよびます.
- 一方， $y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]$ のように，成分を横に並べたベクトルを，行ベクトル（または，横ベクトル）とよびます.

ベクトルの内積

- 2つの n 次元ベクトル x と y に対して,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

で定まるスカラーを, x と y の内積とよびます.

- 例 : $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ のとき, $\langle x, y \rangle = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14$.

- 例 : $x = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.9 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ のとき,
 $\langle x, y \rangle = (-3) \cdot 0.1 + 0 \cdot (-0.9) + 5 \cdot 0.4 = 1.7$.

- 記号 $\langle x, y \rangle$ の他に, $x \cdot y$ なども用いられます.
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
- 内積は, 次元が同じベクトルどうしでしか, 定義できません.

- 例 : $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ のとき, $\langle x, y \rangle$ は定義できません.

ベクトルの直交性

- 2つの n 次元ベクトル x, y の内積 $\langle x, y \rangle$ が 0 であるとき, x と y は直交するといいます.
- 例 : 2 次元ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}$ は直交します.
- 例 : 2 次元ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ は直交しません.
- 例 : 3 次元ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ は互いに直交します.
- 例 : 2 次元ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は直交します.
- 例 : 3 次元ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は互いに直交します.

行列とは

- mn 個のスカラを

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

のように配置したものを, $m \times n$ 型行列とよびます.

- 各 A_{ij} を, 行列 A の (i, j) 成分とよびます.
- A が A_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) を成分とする行列であることを, $A = (A_{ij})$ と表記します.
- 例 :
 - $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ は, 2×3 型行列.
 - $\begin{bmatrix} 2.1 & 6.9 & 4.5 \\ 5.6 & 1.2 & 8.7 \\ 7.3 & 3.4 & 9.8 \end{bmatrix}$ は, 3×3 型行列.

行列とベクトル (1/3)

- n 次元の行ベクトルは, $1 \times n$ 型の行列とみなせます.
 - 例: 4 次元の行ベクトル $[3 \quad 4 \quad -2 \quad 5]$ は, 1×4 型の行列とみなせます.
- m 次元の列ベクトルは, $m \times 1$ 型の行列とみなせます.
 - 例: 3 次元の列ベクトル $\begin{bmatrix} 1.6 \\ -2.5 \\ 4.7 \end{bmatrix}$ は, 3×1 型の行列とみなせます.

行列とベクトル (2/3)

- $m \times n$ 型の行列は, m 本の n 次元行ベクトルを縦に並べたものとみなせます :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

- 例 : 3×4 型の行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 11 & -5 \\ 8 & -3 & 9 & 15 \\ 12 & 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

は, 3 本の 4 次元行ベクトル

$$[2 \quad 6 \quad 11 \quad -5],$$

$$[8 \quad -3 \quad 9 \quad 15],$$

$$[12 \quad 1 \quad -7 \quad 4]$$

を (この順に) 縦に並べたものとみなせます.

行列とベクトル (3/3)

- $m \times n$ 型の行列は, n 本の m 次元列ベクトルを横に並べたものとみなせます :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{array} \right] .$$

- 例 : 3×4 型の行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 11 & -5 \\ 8 & -3 & 9 & 15 \\ 12 & 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

は, 4 本の 3 次元列ベクトル

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -5 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix}$$

を (この順に) 横に並べたものとみなせます.

正方行列, 対角行列

- $n \times n$ 型の行列のことを, n 次の正方行列とよびます.
- 正方行列 $A = (A_{ij})$ の成分 A_{ij} のうち, $i = j$ であるものを対角成分とよび, $i \neq j$ であるものを非対角成分とよびます.

- 例: $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ は, 2 次の正方行列.

A_{11} と A_{22} は対角成分, A_{12} と A_{21} は非対角成分.

- すべての非対角成分が 0 である正方行列を, 対角行列とよびます.

- 例: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ は 2 次の対角行列, $\begin{bmatrix} 1.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.7 \end{bmatrix}$ は 3 次の対角行列.

単位行列

- すべての対角成分が 1 である対角行列を, 単位行列とよびます. 単位行列は I で表します:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- 型を明確にするために, I_n と書くこともあります.

零行列, 実行列

- すべての成分が 0 である行列を, 零行列とよびます. 零行列は O で表します:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

- 型を明確にするために, $O_{m,n}$ と書くこともあります.
- すべての成分が 0 であるベクトルを, 零ベクトルとよびます. 零ベクトルは $\mathbf{0}$ で表します (型を明確にするために, $\mathbf{0}_n$ と書くこともあります).
- すべての成分が実数である行列を, 実行列とよびます.
また, すべての成分が実数であるベクトルを, 実ベクトルとよびます.
- 以下では, 実行列と実ベクトルのみを扱います.

行列の演算 スカラー倍

- 行列のスカラー倍は、そのスカラーを各成分に乘じます.

- 例 : $2 \times \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 16 \\ 4 & 12 & 2 \end{bmatrix}.$

- 一般に、実数 α に対して、 $\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots & \alpha A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \cdots & \alpha A_{mn} \end{bmatrix}.$

行列の演算 和と差

- 行列の和

- 2つの行列が同じ型をもつとき、それらの和が定義できます。

- 行列の和は、成分ごとの和です。

- 例：
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

- 一般に、
$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{bmatrix}.$$

- $A + B = B + A.$

- 行列の差は、 $A - B = A + (-1)B.$

行列の演算 行列と列ベクトルの積

- $m \times n$ 型の行列 $A = (A_{ij})$ と n 次元の列ベクトル x の積は、次のように定めます。

1. A を、行ベクトルを並べたものとみます：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(m)} \end{bmatrix}.$$

2. 積 Ax は、 m 次元の列ベクトルで、その第 i 列は $\mathbf{a}^{(i)}$ と x の内積です：

$$Ax = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}^{(1)}, x \rangle \\ \langle \mathbf{a}^{(2)}, x \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{a}^{(m)}, x \rangle \end{bmatrix}.$$

例： $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 27 \end{bmatrix}.$

行列の演算 行ベクトルと行列の積

- m 次元の行ベクトル y と $m \times n$ 型の行列 $A = (A_{ij})$ の積は、次のように定めます。

1. A を、列ベクトルを並べたものとみます：

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_{(1)} & \mathbf{a}_{(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{(n)} \end{array} \right].$$

2. 積 yA は、 n 次元の行ベクトルで、その第 j 列は y と $\mathbf{a}_{(j)}$ の内積です：

$$yA = \left[\langle y, \mathbf{a}_{(1)} \rangle \mid \langle y, \mathbf{a}_{(2)} \rangle \mid \cdots \mid \langle y, \mathbf{a}_{(n)} \rangle \right].$$

- 例：
$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \left[\left\langle \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \mid \left\langle \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \right] = \begin{bmatrix} 23 & 32 \end{bmatrix}.$$

行列の演算 行列と行列の積

- $m \times n$ 型の行列 $A = (A_{ij})$ と $n \times k$ 型の行列 $B = (B_{jl})$ の積は、次のように定めます。

1. A は行ベクトルを並べ、 B は列ベクトルを並べたものとみます：

$$A = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}^{(1)} \\ \hline \mathbf{a}^{(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}^{(m)} \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{b}_{(1)} & \mathbf{b}_{(2)} & \cdots & \mathbf{b}_{(k)} \end{array} \right].$$

2. 積 AB は、 $m \times k$ 型の行列で、その (i, l) 成分は $\mathbf{a}^{(i)}$ と $\mathbf{b}_{(l)}$ の内積です：

$$AB = \left[\begin{array}{cccc} \langle \mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}_{(1)} \rangle & \langle \mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}_{(2)} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}_{(k)} \rangle \\ \langle \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{b}_{(1)} \rangle & \langle \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{b}_{(2)} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{b}_{(k)} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{a}^{(m)}, \mathbf{b}_{(1)} \rangle & \langle \mathbf{a}^{(m)}, \mathbf{b}_{(2)} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}^{(m)}, \mathbf{b}_{(k)} \rangle \end{array} \right].$$

行列の演算 特別な場合 (1/2)

- n 次元の行ベクトル s と n 次元の列ベクトル x の積 sx は、スカラーで、 s と x の内積に等しいです : $sx = \langle s, x \rangle$.

- 例 : $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14.$

- n 次元の列ベクトル $x = (x_i)$ と m 次元の行ベクトル $y = (y_j)$ の積 xy は、 $n \times m$ 型の行列で、

$$xy = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_m \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_m \end{bmatrix}.$$

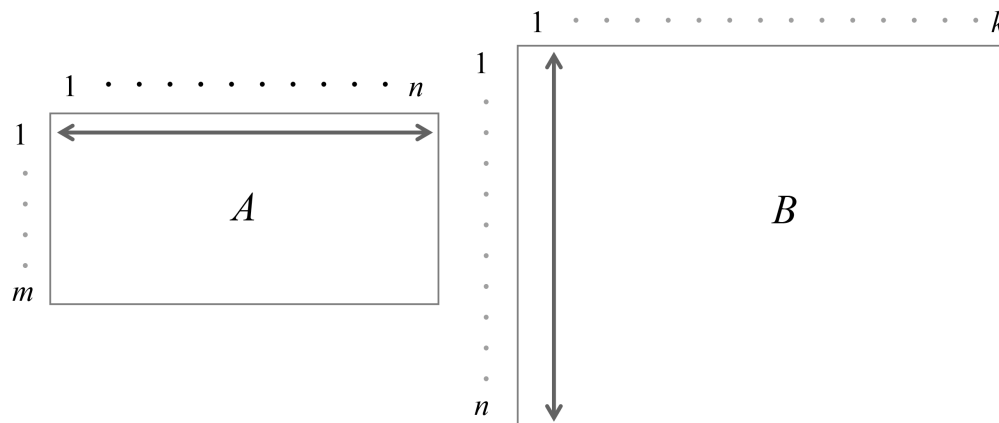
- 例 : $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}.$

行列の演算 特別な場合 (2/2)

- $m \times n$ 型の行列 A に対して, $AI_n = A$, $I_mA = A$.
 - つまり, 単位行列を掛けても行列は不変です.
- $m \times n$ 型の行列 A に対して, $AO_{n,k} = O_{m,k}$, $O_{k,m}A = O_{k,n}$.
 - つまり, 行列に零行列を掛けた結果は零行列です.

行列の積に関する注意点 (1/2)

- 積が定められるかは，型に依存します．



$\longleftrightarrow$ と $\updownarrow$ が同じ長さのときのみ，積 AB が定義されます．

- A が $m \times n$ 型行列で B が $n \times m$ 型行列なら， AB も BA も定義されます．しかし，両者は同じ型とは限りません（ AB は $m \times m$ 型で， BA は $n \times n$ 型）．

- $m = 2, n = 3$ の例：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 15 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 18 & 0 \end{bmatrix}.$$

行列の積に関する注意点 (2/2)

- A も B も n 次正方行列ならば, AB も BA も定義されます. しかし, $AB = BA$ が成り立つとは限りません.

- 例 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- A が正方行列のとき, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA (= A^2A = AA^2)$ と書きます.
- 「行列の割り算」は, してはいけません.
 - $AB = C$ でも, $B = \frac{C}{A}$ と書いてはいけません.

転置 (1/2)

- $m \times n$ 型の行列 $A = (A_{ij})$ に対して, (i, j) 成分が A_{ji} であるような $n \times m$ 型行列のことを, A の転置 (または, A の転置行列) とよび, A^T と書きます.
- 例: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ に対して, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.
- 転置を表す記号としては, $A^T, {}^tA, A'$ など用いられます.
- $(A^T)^T = A$.
- つまり, 転置の転置はもとの行列です.

転置 (2/2)

- $(AB)^{\top} = B^{\top} A^{\top}.$

- 例 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 15 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}.$$

- x と p がともに n 次元の列ベクトルであるとき, その内積は $x^{\top}$ と p の積に等しいです : $x^{\top} p = \langle x, p \rangle.$

- 例 : $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11.$

- y と q がともに m 次元の列ベクトルであるとき, その内積は y と $q^{\top}$ の積に等しいです : $y q^{\top} = \langle y, q \rangle.$

- 例 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^{\top} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11.$

ベクトルのノルム

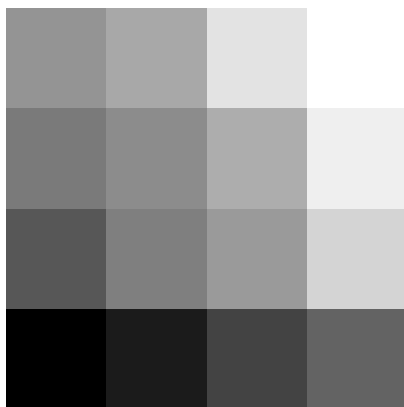
- n 次元ベクトル $x = (x_i)$ に対して,
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$
を x のノルムとよびます.
- $\|x\|_2$ とも書きます.
- ユークリッドノルムや, 2 ノルム, ℓ_2 ノルムともよばれます.
- 例 : $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ に対して, $\|x\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
- 例 : $x = [1 \ 2 \ 3]$ に対して, $\|x\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

ベクトルのノルムの性質

- $\|x\| \geq 0$.
- $\|x\| = 0$ ならば $x = \mathbf{0}$.
- 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
 - 例 : $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha = -3$, $\alpha x = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix}$ に対して,
$$\|x\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \quad \|\alpha x\| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

行列はどのように生じるのでしょうか (1/4)

- デジタル画像 (⇨ § 4-6)
 - グレースケール画像では, 各ピクセル (画素) に 0 から 255 の整数が割り当てられています.
 - こうして, 非負の整数行列 (つまり, すべての成分が 0 以上の整数である行列) が生じます.



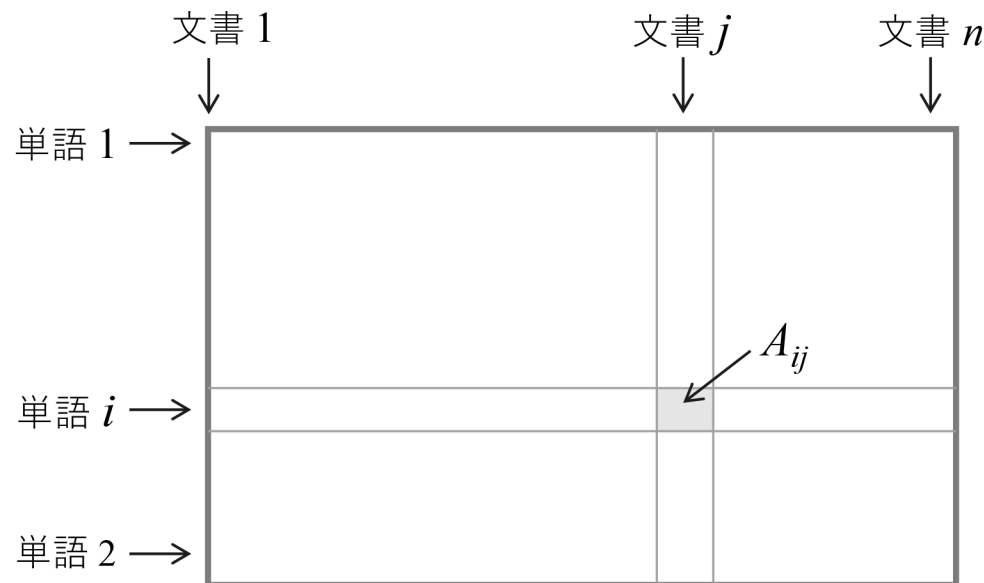
4 × 4 = 16 ピクセル
からなる画像の例

150	167	220	245
127	143	172	230
96	131	155	206
18	42	78	106

対応する行列
(4 × 4 型の非負の整数行列)

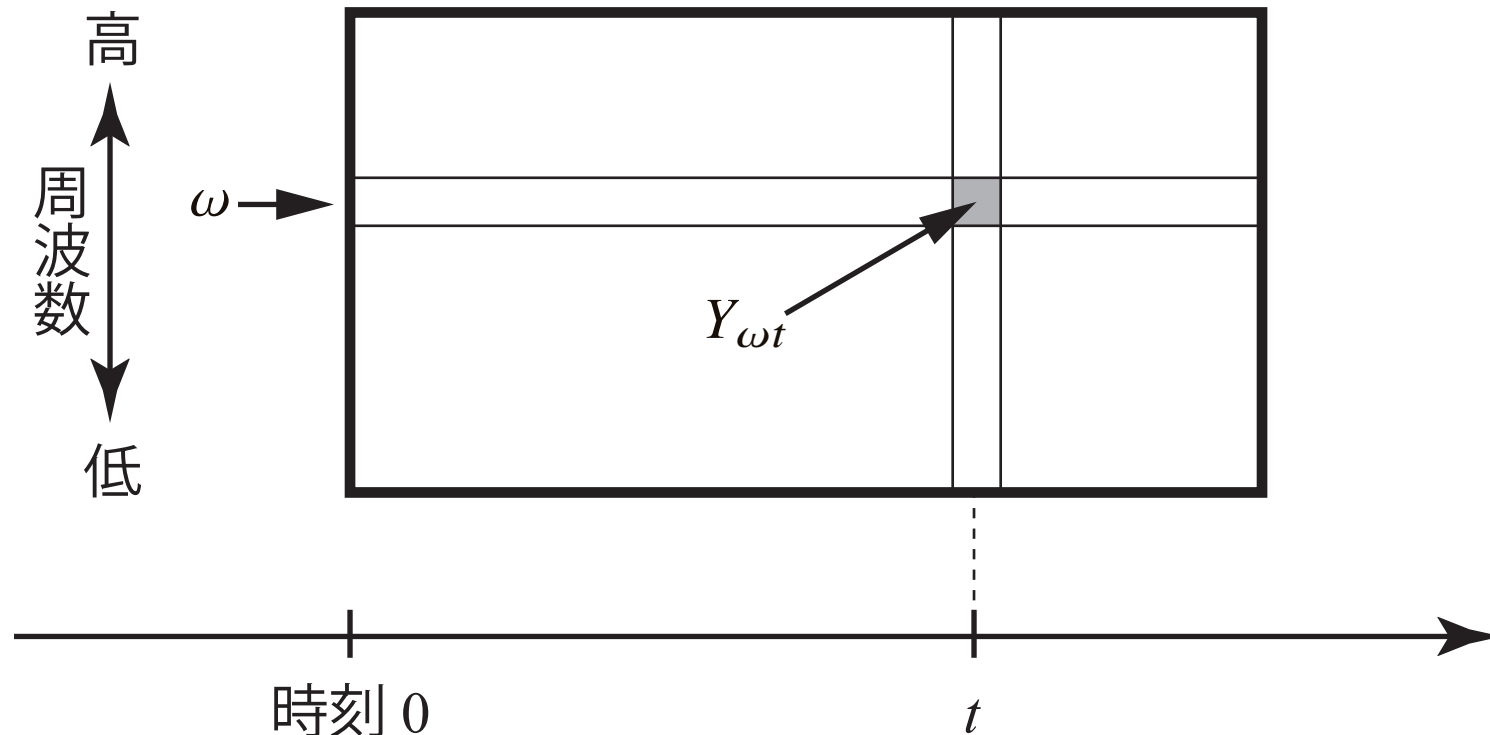
行列はどのように生じるのでしょうか (2/4)

- 文書のデータ (⇨ § 4-5)
 - 単語文書行列：単語 i が文書 j に現れる回数を A_{ij} とすると、行列 A ができます.
 - こうして、非負の整数行列が生じます.
 - テキストデータの分析や検索に利用されます.



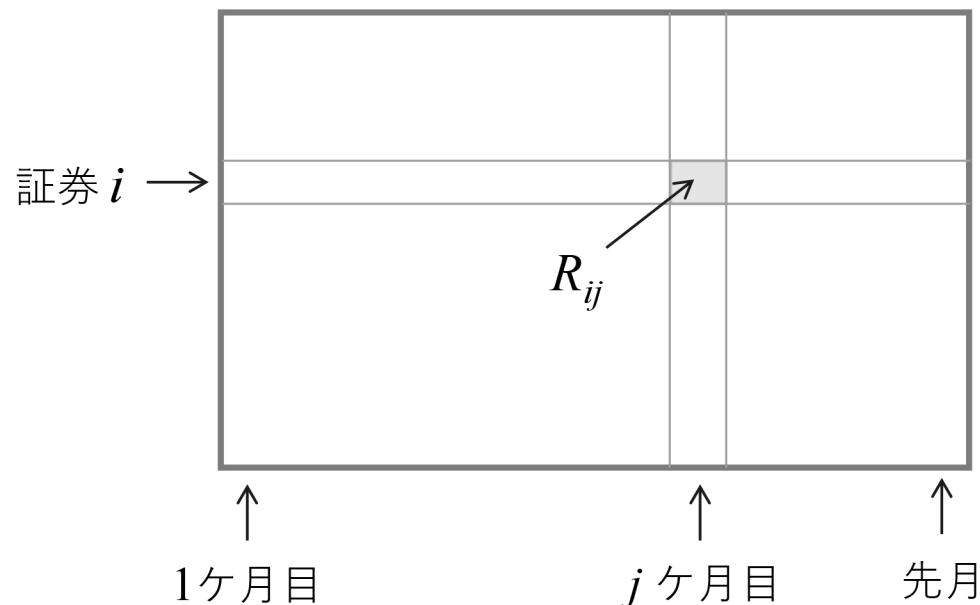
行列はどのように生じるのでしょうか (3/4)

- 音響信号の分析 (⇨ § 1-4)
 - 時刻 t における周波数 ω の信号成分の強さ $Y_{\omega t}$ を並べると、行列 Y ができます.
 - こうして、非負の実行列が生じます.
 - 各成分は、「強さ」を表すので 0 以上です.



行列はどのように生じるのでしょうか (4/4)

- 証券の収益率の月次データ (⇨ § 4-4)
 - 証券 i の月 j における収益率を R_{ij} とおけば, 行列 R ができます.
 - こうして, 実行列が生じます.
 - 損失が生じた場合は $R_{ij} < 0$ なので, 一般に正・負どちらの成分もちます.
- ポートフォリオ (運用証券の組合せ) の決定などに用いられます.



線形代数

- このようにして実世界のさまざまな問題から生じる行列ですが，和や積や内積だけでなく，逆行列や固有値などという概念も定められ，実際の問題を解く際に頻繁に用いられています．
- このような数学の一分野は，線形代数とよばれています．

線形代数は どんな役に立つのでしょうか (1/6)

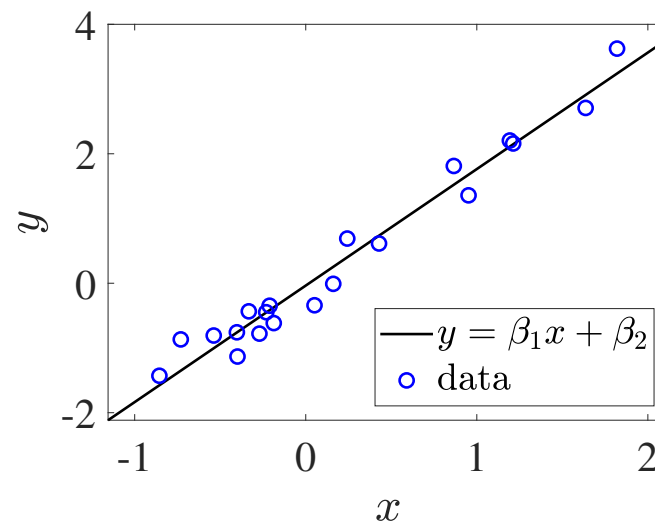
- 回帰分析 (⇨ § 4-8)

- たとえば x_i をある人の身長, y_i をその人の体重とすると,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

という行列 X とベクトル y が生じます. モデル $y = \beta_1 + \beta_2 x$ のデータからの誤差の2乗和は, $\|X\beta - y\|^2$ で計算できます.

- たとえば, 電卓で $(\beta_1 + \beta_2 x_1 - y_1)^2 + (\beta_1 + \beta_2 x_2 - y_2)^2 + \cdots + (\beta_1 + \beta_2 x_n - y_n)^2$ を計算してみると, n が大きい場合はとても大変です.

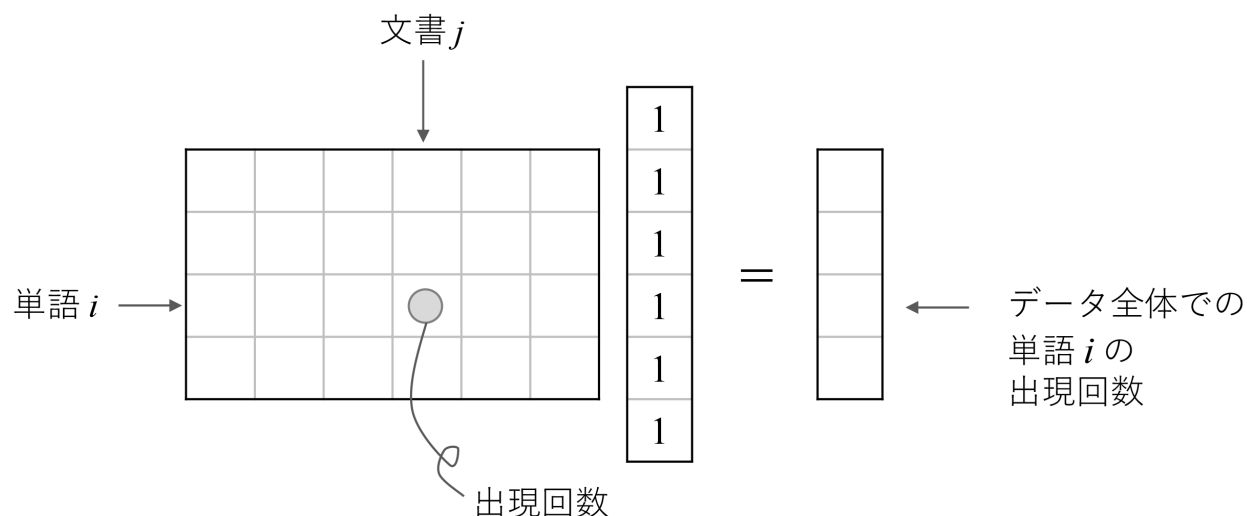


線形代数は どんな役に立つのでしょうか (2/6)

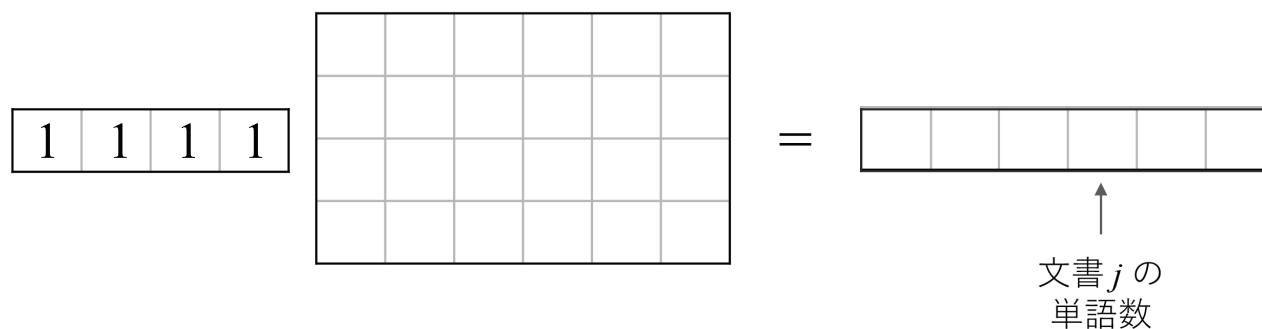
- データ点間の類似度 (⇨ § 4-5)
 - データが n 次元ベクトル x_i ($i = 1, \dots, d$) として与えられているとき,
 x_i と x_j の類似度の指標として $\frac{x_i^\top x_j}{\|x_i\| \|x_j\|}$ が用いられることがあります.
- 解説はしませんが, 線形代数は, 連立 1 次方程式を解くために用いられています.
- また, 解説はしませんが, データ分析の手法として, 次のような場面で用いられています.
 - 主成分分析, 画像処理 (⇨ § 1-4) などでの低ランク行列近似 (特異値分解), 音響信号処理 (⇨ § 1-4) などでの非負行列因子分解, 多次元データの可視化 (⇨ § 1-4) のための多様体学習 (固有値問題) など.

線形代数は どんな役に立つのでしょうか (3/6)

- 単語文書行列 ($\Rightarrow$ § 4-8) に対して,
 - 右から $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$ を乗じると,

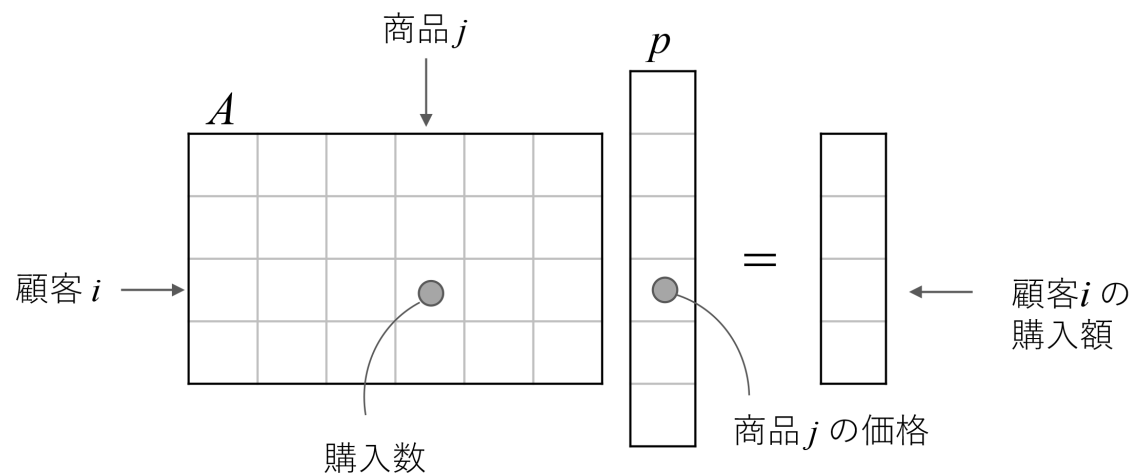


- 左から $\mathbf{1}^\top = (1, \dots, 1)$ を乗じると,



線形代数は どんな役に立つのでしょうか (4/6)

- 購買データ (1/2) (⇔ § 4-9 : レコメンデーション)
 - ある日の POS データから, 来店者 i が商品 j を購入した数 A_{ij} を集計して, 行列 $A = (A_{ij})$ をつくります.
 - 一方, 商品 j の価格を p_j とおき, 列ベクトル $p = (p_j)$ をつくります.
 - Ap を計算すると,



線形代数は どんな役に立つのでしょうか (4/6)

- 購買データ (2/2) (⇔ § 4-9 : レコメンデーション)
 - ある日の POS データから, 来店者 i が商品 j を購入した数 A_{ij} を集計して, 行列 $A = (A_{ij})$ をつくります.
 - 一方, 商品 j の価格を p_j とおき, 列ベクトル $p = (p_j)$ をつくります.
 - $\mathbf{1}^T A$ を計算すると,

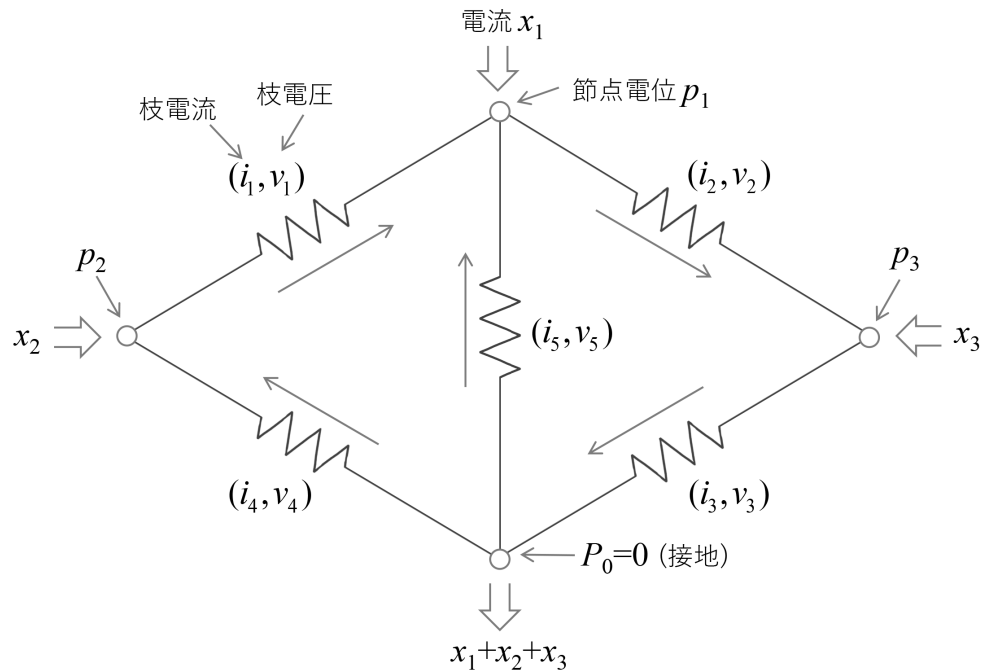
$$\begin{array}{c} \mathbf{1}^T \\ \boxed{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1} \end{array} \quad \begin{array}{c} A \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array}} \end{array} = \boxed{} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{商品 } j \text{ の販売数} \end{array}$$

- $\mathbf{1}^T A p$ を計算すると

$$\begin{array}{c} \mathbf{1}^T \\ \boxed{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1} \end{array} \quad \begin{array}{c} A \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array}} \end{array} \quad \begin{array}{c} p \\ \boxed{\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}} \end{array} = \boxed{} \quad \begin{array}{c} \text{1日の} \\ \text{総売上} \end{array}$$

線形代数は どんな役に立つのでしょうか (5/6)

● 電気回路 (1/2)



節点 i から節点 l に向かう枝 j があるとき $N_{ij} = 1$, $N_{lj} = -1$ とおくと行列 N ができます：

	枝				
	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
節点 x_1	-1	1	0	0	1
x_2	1	0	0	-1	0
x_3	0	1	1	0	0

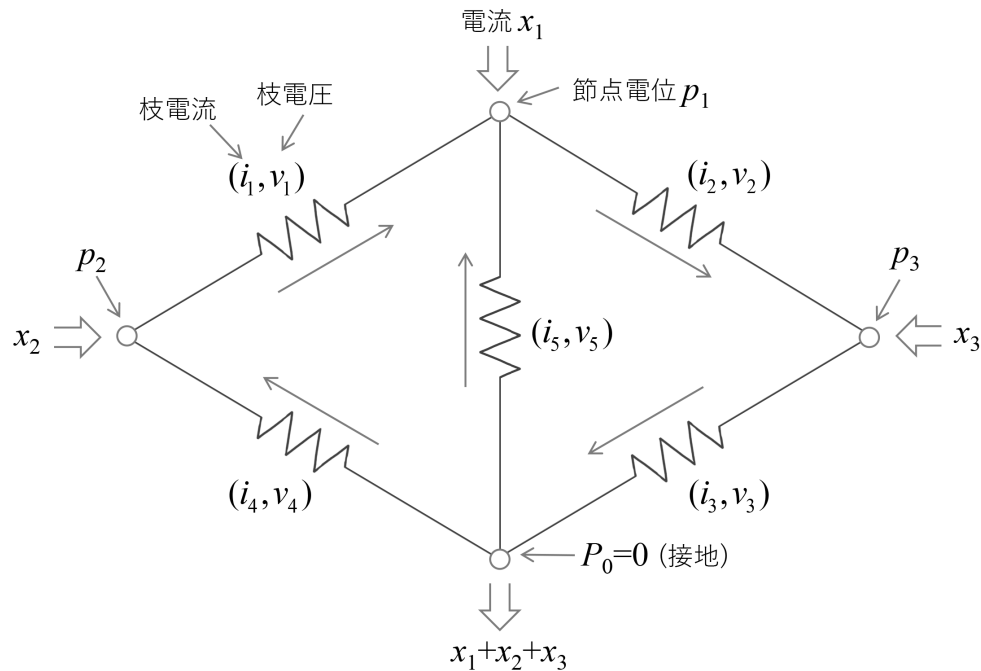
(グラフの接続行列)

● 電流の保存則は,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{つまり, } Ni = x.$$

線形代数は どんな役に立つのでしょうか (5/6)

● 電気回路 (2/2)



節点 i から節点 l に向かう枝 j があるとき $N_{ij} = 1$, $N_{lj} = -1$ とおくと行列 N ができます：

		枝				
		i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
節点	x_1	-1	1	0	0	1
	x_2					
	x_3					
		0	1	1	0	0

(グラフの接続行列)

● 節点電位と枝電圧の関係は,

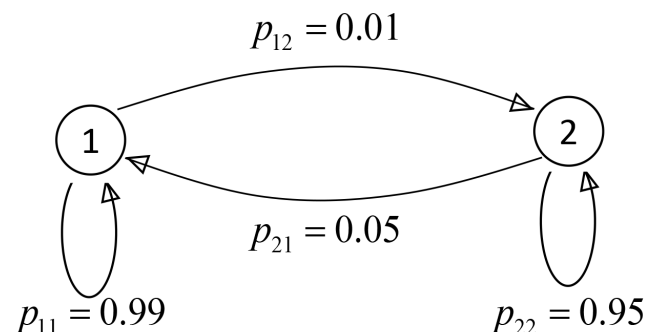
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \quad \text{つまり, } \mathbf{v} = \mathbf{N}^\top \mathbf{p}.$$

線形代数は どんな役に立つのでしょうか (6/6)

- マルコフ連鎖 (1/2)

- 具体例として, 毎年, 買い換える商品で, A 社製を買うか B 社製を買うかという問題を考えましょう.

- ① は A 社製を買うという状態,
② は B 社製を買うという状態として,
次の年にどちらに推移するかの確率を
右図のように表します.

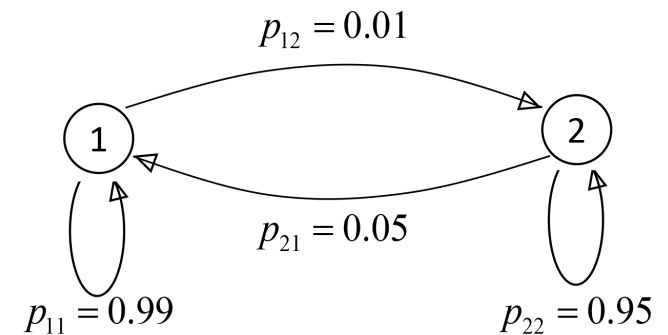


- たとえば, 今年 A 社製を買った人は, 来年は 0.99 の確率で A 社製を買い, 0.01 の確率で B 社製を買う, ということです.
- 確率 p_{ij} を並べると, 行列 $P = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix}$ が生じます.
- 成分はすべて 0 以上.
- 行ごとの成分の和は 1.

線形代数は どんな役に立つのでしょうか (6/6)

- マルコフ連鎖 (2/2)

- 時刻 k において, 状態 i である確率を $y_i^{(k)}$ で表します. つまり, A 社製と B 社製のシェアの比が $y_1^{(k)} : y_2^{(k)}$ です ($y_1^{(k)} + y_2^{(k)} = 1$).



- 次の時刻では,
$$y_1^{(k+1)} = p_{11}y_1^{(k)} + p_{21}y_2^{(k)},$$
$$y_2^{(k+1)} = p_{12}y_1^{(k)} + p_{22}y_2^{(k)}.$$

つまり, $\mathbf{y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k)} & y_2^{(k)} \end{bmatrix}$ とおけば $\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} P$.

- いま, $\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix}}_{=P}$ が成り立つので, この例ではシェ

アが 5 : 1 が定常状態 (もうそれ以上変化しない状態) です.

- このような定常状態の存在や一意性が, 実は, 行列 P の性質から明らかにできます.

索引

索引（記号）

- $\in$ 6
- $\ni$ 6
- $\notin$ 6
- $\nexists$ 6
- $\subset$ 11
- $\supset$ 11
- $\cap$ （集合の共通部分） 12
- $\cap$ （積事象） 103
- $\cup$ （和集合） 12
- $\cup$ （和事象） 103
- $\setminus$ 14

索引（記号）

- $\emptyset$ （空集合） 10
- $\emptyset$ （空事象） 103
- $A - B$ （集合 A と集合 B に対して） 12
- A^c （集合 A に対して） 14
- A^c （事象 A に対して） 103
- A^T （行列 A に対して） 163
- $\langle x, y \rangle$ （ n 次のベクトル x と y に対して） 145
- $x \cdot y$ （ n 次のベクトル x と y に対して） 145
- $\text{BN}(n, p)$ 126
- $\frac{d}{dx}f(a)$ 63
- $\text{DU}(r)$ 124

索引 (記号)

- e 28
- $\exp$ 28
- $E[X]$ 120
- $\text{Ex}(\lambda)$ 138
- $f'(a)$ 63
- $\int f(x) dx$ 78
- $\int_a^b f(x) dx$ 80
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 57
- $\log$ 44
- $\log_a$ 33
- $n!$ 93

索引 (記号)

- $\mathbb{N}$ 7
- $\binom{n}{r}$ 94
- ${}_nC_r$ 94
- ${}_nP_r$ 93
- $N(\mu, \sigma^2)$ 134
- $P(A)$ 105
- $P(B|A)$ 108
- $P(\{X = x_k\})$ 118
- $\text{Po}(\lambda)$ 128
- $\mathbb{Q}$ 7
- $\mathbb{R}$ 7

索引（記号）

- $|S|$ 97
- $U(a, b)$ 133
- $V[X]$ 122
- $\mathbb{Z}$ 7
- μ （期待値） 120
- σ （標準偏差） 122
- σ^2 （分散） 122

索引（用語）

- 一様分布 133
- 階乗 93
- ガウス分布 134
- 確率 101
- 確率関数 118
- 確率分布 118
- 確率分布関数 119
- 確率変数 117
- 確率密度関数 131
- 加法定理（確率の） 107
- 関数 55

索引（用語）

- 期待値 120
- 共通部分（集合の） 12
- 行ベクトル 144
- 行列 147
- 極限值 57
- 空事象 103
- 空集合 10
- 組合せ 94
- 結合法則（集合の） 15
- 元 6
- 原始関数 78

索引（用語）

- 合成関数の微分法 66
- 差集合 12
- 試行 102
- 事後確率 114
- 事象 102
- 指数（累乗の） 19
- 指数関数 23
- 指数分布 138
- 事前確率 114
- 自然対数 44
- 自然対数の底 28, 72

索引（用語）

- 実行列 153
- 実ベクトル 153
- 集合 6
- 順列 93
- 条件付き確率 108
- 乗法定理 108
- 常用対数 33
- スカラー 142
- 正規分布 134
- 成分 142, 147
- 正方行列 151

索引（用語）

- 積事象 103
- 積分定数 78
- 全体集合 14
- 対角行列 151
- 対角成分 151
- 対数 33
- 対数関数 33
- 縦ベクトル 144
- 単位行列 152
- 直交 146
- 独立（2つの事象が） 111

索引（用語）

- 底（指数関数の） 23
- 底（対数の） 33
- 定義域 55
- 定積分 80
- 転置 163
- 導関数 63
- ド・モルガンの法則 17
- 内積 145
- 2項係数 95
- 2項定理 95
- 2項分布 126

索引（用語）

- ネイピア数 28
- ノルム 165
- 排反 103
- 非対角成分 151
- 微分 63
- 微分可能 74
- 微分係数 63
- 微分積分法の基本定理 81
- 標準正規分布 134
- 標準偏差 122
- 標本空間 102

索引（用語）

- 標本点 102
- 不定積分 78
- 部分集合 11
- 分散 122
- 分配法則（集合の） 16
- 分布 118
- 分布関数 119
- 平均 120
- ベイズの定理 114
- べき 19
- ベクトル 142

索引（用語）

- ベルヌーイ分布 125
- ポアソン分布 128
- 包除原理 97
- 補集合 14
- 交わり 12
- 無限集合 6
- 有限集合 6
- 要素（集合の） 6
- 横ベクトル 144
- 余事象 103
- 離散一様分布 124

索引（用語）

- 累乗 19
- 累積分布関数 119
- 零行列 153
- 零ベクトル 153
- 列ベクトル 144
- 連続（関数が） 56
- 和事象 103
- 和集合 12